7 Rechtsstetige Modifikationen

Bei der Herleitung der Submartingal-Ungleichungen im stetigen Fall war vorausgesetzt worden, dass ein rechtsstetiges Submartingal vorliegt.

Wir werden jetzt Bedingungen kennen lernen, unter denen diese Annahme gerechtfertigt ist.

Satz 7.1. *$\{X_t\}_{t\geq 0}$ sei ein an $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$ adaptiertes Submartingal und $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$ erfülle die „üblichen" Bedingungen $(F0)$, $(F1)$. Dann gilt:*

$\{X_t\}_{t\geq 0}$ besitzt genau dann eine rechtsstetige Modifikation, wenn gilt:
$t \longmapsto EX_t$ ist eine rechtsstetige Funktion.

Falls eine rechtsstetige Modifikation existiert, kann sie so gewählt werden, dass der Prozess ein cadlag-Prozess ist, d.h., dass die Pfade in der Menge

$D[0,\infty) := \{t \longmapsto x(t) \,|\, x$ *ist rechtsstetig und besitzt linksseitige Limiten auf* $[0,\infty)\}$

liegen.

Beispiel 7.1. (Poisson-Prozess)
Es existiert eine cadlag-Modifikation des Poisson-Prozesses (mit Intensität $\lambda > 0$).

Sei $D := \{x : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{N}_0 \,|\, x$ ist isotone cadlag-Funktion$\}$. Es lässt sich sogar zeigen (vgl. Bauer (2002), § 41):

Es existiert eine Modifikation des Poisson-Prozesses mit Werten in D.

Man sagt, dass $x \in D$ nur „Sprünge der Höhe 1" besitzt, falls
$\big(0 \leq \big)\; x(t) - x(t-) \in \{0,1\} \quad \forall\, t \geq 0$.

Es gilt:

Satz 7.2. *$\{N_t\}_{t\geq 0}$ sei eine Modifikation des Poisson-Prozesses (mit Intensität λ) und Pfaden in D. Dann folgt:*

a) $\exists\, \Omega_1 \in \mathcal{A}$, $P(\Omega_1) = 1$: $t \longmapsto N_t(\omega)$ *besitzt nur Sprünge der Höhe* 1 $\forall\, \omega \in \Omega_1$;

b) $\forall\, t_0 \geq 0\; \exists\, \Omega_2 \in \mathcal{A}$, $P(\Omega_2) = 1$: $t \longmapsto N_t(\omega)$ *ist stetig in* t_0 $\forall\, \omega \in \Omega_2$;

c) $\exists\, \Omega_3 \in \mathcal{A}$, $P(\Omega_3) = 1$: $t \longmapsto N_t(\omega)$ *besitzt* ∞ *viele Sprünge der Höhe* 1 $\forall\, \omega \in \Omega_3$.

Betrachten wir nun die ZV.

$$T_n \;:=\; \inf\{t \geq 0 : N_t \geq n\}\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

so gilt $T_0 \;\equiv\; 0$ und

$$\{T_n \leq t\} \;=\; \{N_t \geq n\}\,, \quad \text{also ist } T_n \text{ messbar}\,,$$

sowie (vgl. Schmitz (1996), § 10)

$$\{T_n - T_{n-1}\}_{n=1,2,\ldots} \text{ sind i.i.d. } Exp(\lambda)\text{-verteilt}\,.$$

Umgekehrt lässt sich über eine Folge $\{\tau_n\}_{n=1,2,\ldots}$ von i.i.d. $Exp(\lambda)$-verteilten ZV. in folgender Weise ein Poisson-Prozess mit cadlag-Pfaden definieren, die ∞ viele Sprünge der Höhe 1 besitzen:

Da $P\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{\tau_n > 0\}\Big) = 1$, folgt für $T_0 := 0$, $T_n := \tau_1 + \cdots + \tau_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$:

$$0 \;=\; T_0 \;<\; T_1 \;<\; \cdots \;<\; T_n \;<\; \cdots \quad P\text{-f.s.}$$

Setzt man, für $\omega \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{\tau_n > 0\}$,

$$N_t(\omega) \;=\; \begin{cases} 0\,, & 0 = T_0(\omega) \;\leq\; t \;<\; T_1(\omega)\,, \\ 1\,, & T_1(\omega) \;\leq\; t \;<\; T_2(\omega)\,, \\ \vdots & \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ n\,, & T_n(\omega) \;\leq\; t \;<\; T_{n+1}(\omega)\,, \end{cases}$$

so erhält man einen Poisson-Prozess mit Intensität λ, $\mathbb{N}_0$-wertig, mit P-f.s. rechtsstetigen Pfaden und ∞ vielen Sprüngen der Höhe 1 (vgl. Schmitz (1996), § 10).