8 Separabilität

Außer den „stochastischen Eigenschaften“ von Prozessen $\{X_t\}_{t \in T}$, $T = [0, \infty)$ oder $T = \mathbb{N}_0$, die durch die konsistente Familie $\{P_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}} : t_j \in T, n \in \mathbb{N}\}$ festgelegt sind, sind zusätzliche „analytische Eigenschaften“, d.h. z.B. Pfadeigenschaften wie Stetigkeit, cadlag o. dgl., wünschenswert, etwa um Messbarkeitsproblemen zu begegnen. Analytische Eigenschaften erfordern jedoch zunächst zusätzliche Voraussetzungen.

Eine allgemeine Eigenschaft, die es gestattet, das analytische Verhalten von $\{X_t\}_{t \in T}$ auf das in abzählbar vielen Punkten zurückzuführen, ist die Eigenschaft der „Separabilität“ :

Definition 8.1. Ein reellwertiger Prozess $\{X_t\}_{t \in T}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt separabel $:\Leftrightarrow \exists S \subset T$, S abzählbar ($\bar{S} = T$) : $\forall \omega \in \Omega, t \in T \exists (s_n) \subset S, s_n \rightarrow t :$
 $X_{s_n}(\omega) \rightarrow X_t(\omega) \quad (n \rightarrow \infty).$
 S heißt separierende Menge.

Beispiel 8.1.

- a) Ist $\{X_t\}_{t \geq 0}$ ein (rechts-, links-) stetiger Prozess, so ist $\{X_t\}_{t \geq 0}$ separabel. Jede abzählbare, dichte Teilmenge S von $[0, \infty)$ ist separierend.
- b) Sei $S \subset [0, \infty)$ abzählbar, dicht, und

$$X_t = \begin{cases} 1, & U = t, \\ 0, & U \neq t, \end{cases}$$

wobei $P(U = u) = 0 \quad \forall u \geq 0$. Dann ist $\{X_t\}_{t \geq 0}$ nicht separabel, aber es gibt eine separable Modifikation $\{\tilde{X}_t\}_{t \geq 0}$.

Bemerkung 8.1. Sei $\{X_t\}_{t \geq 0}$ separabel und $S \subset [0, \infty)$ separierend. Dann gilt für jede (offene) Teilmenge $I \subset [0, \infty)$ und für beliebiges $t_0 \in [0, \infty)$:

- a) $\inf_{t \in I} X_t = \inf_{s \in I \cap S} X_s, \quad \sup_{t \in I} X_t = \sup_{s \in I \cap S} X_s;$
- b) $\liminf_{t \rightarrow t_0} X_t = \liminf_{\substack{s \rightarrow t_0 \\ s \in S}} X_s, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow t_0} X_t = \overline{\lim}_{\substack{s \rightarrow t_0 \\ s \in S}} X_s.$

Satz 8.1. (Doob) Sei $\{X_t\}_{t \geq 0}$ ein reellwertiger stochastischer Prozess. Dann gibt es eine separable Modifikation $\{\tilde{X}_t\}_{t \geq 0}$.

Zunächst beweisen wir :

Lemma 8.1. Sei $\{X_t\}_{t \geq 0}$ ein reellwertiger stochastischer Prozess
 $\implies \exists S \subset [0, \infty)$ abzählbar, dicht $\forall t \geq 0 \exists N_t \in \mathcal{A}, P(N_t) = 0 :$
Für $\omega \notin N_t \exists (s_n) \subset S, s_n \rightarrow t : X_{s_n}(\omega) \longrightarrow X_t(\omega) \quad (n \rightarrow \infty).$

Für einen beschränkten stochastischen Prozess $\{X_t\}_{t \geq 0}$ erhalten wir nun die gewünschte Modifikation :

Lemma 8.2. Sei $\{X_t\}_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit
 $a < X_t(\omega) < b \quad \forall t \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega \quad (\exists a, b \in \mathbb{R}).$
Dann gibt es eine separable Modifikation $\{\tilde{X}_t\}_{t \geq 0}$ von $\{X_t\}_{t \geq 0}$ mit
 $a \leq \tilde{X}_t(\omega) \leq b \quad \forall t \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega.$

Der Beweis von Satz 8.1 lässt sich auf den beschränkten Fall zurückführen. Allerdings ist es notwendig, Modifikationen $\{\tilde{X}_t\}$ zuzulassen, die (mit Wahrscheinlichkeit 0) die Werte $\pm\infty$ annehmen können.

Bemerkung 8.2. Gibt es zu einem separablen stochastischen Prozess $\{X_t\}_{t \geq 0}$ einen äquivalenten Prozess $\{\tilde{X}_t\}_{t \geq 0}$ mit stetigen (rechtsstetigen) Pfaden, so besitzt $\{X_t\}$ eine stetige (rechtsstetige) Modifikation.

Beispiel 2.3 (Fortsetzung) Sei $\{X_t\}_{t \geq 0}$ eine separable Markov-Kette mit Zustandsraum $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ und Übergangsmatrizen

$$P(t) = e^{tA}, \quad A = ((a_{ij})), \quad a_{ij} = \begin{cases} \lambda_{ij}, & i \neq j, \\ -\lambda_{ii}, & i = j, \end{cases}$$

wobei $\lambda_{ij} \geq 0, \lambda_{ii} = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}, \sum_j |\lambda_{ij}| \leq c \quad \forall i.$

Interpretation der infinitesimalen Parameter λ_{ii} :

Sei V_t die Verweilzeit in dem Zustand, der zur Zeit t eingenommen wird, d.h.

$$V_t = \inf \{s > 0 : X_{t+s} \neq X_t\}, \quad \inf \emptyset := +\infty.$$

Dann gilt :

$$P(V_t > v | X_t = i) = e^{-\lambda_{ii}v} \quad (v > 0),$$

d.h. V_t ist (bedingt) $Exp(\lambda_{ii})$ -verteilt, unabhängig von $t!$