8 Separabilität

Außer den „stochastischen Eigenschaften“ von Prozessen $\{X_t\}_{t\in T}$, $T = [0,\infty)$ oder $T = \mathbb{N}_0$, die durch die konsistente Familie $\big\{P_{X_{t_1},\dots,X_{t_n}} : t_j \in T\,,\ n \in \mathbb{N}\big\}$ festgelegt sind, sind zusätzliche „analytische Eigenschaften“, d.h. z.B. Pfadeigenschaften wie Stetigkeit, cadlag o. dgl., wünschenswert, etwa um Messbarkeitsproblemen zu begegnen. Analytische Eigenschaften erfordern jedoch zunächst zusätzliche Voraussetzungen.

Eine allgemeine Eigenschaft, die es gestattet, das analytische Verhalten von $\{X_t\}_{t\in T}$ auf das in abzählbar vielen Punkten zurückzuführen, ist die Eigenschaft der „Separabilität“:

Definition 8.1. *Ein reellwertiger Prozess* $\{X_t\}_{t\in T}$ *auf* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *heißt separabel*
$:\Longleftrightarrow\quad \exists\ S \subset T\,,\ S$ *abzählbar* $(\bar{S} = T)$: $\forall\ \omega \in \Omega\,,\ t \in T\ \ \exists\ (s_n) \subset S\,,\ s_n \to t$:
$X_{s_n}(\omega) \longrightarrow X_t(\omega) \quad (n \to \infty)$.
S *heißt separierende Menge*.

Beispiel 8.1.

a) Ist $\{X_t\}_{t\ge 0}$ ein (rechts-, links-) stetiger Prozess, so ist $\{X_t\}_{t\ge 0}$ separabel. Jede abzählbare, dichte Teilmenge S von $[0,\infty)$ ist separierend.

b) Sei $S \subset [0,\infty)$ abzählbar, dicht, und

$$X_t = \begin{cases} 1\,, & U = t\,,\\ 0\,, & U \ne t\,,\end{cases}$$

wobei $P(U = u) = 0 \quad \forall\ u \ge 0$. Dann ist $\{X_t\}_{t\ge 0}$ nicht separabel, aber es gibt eine separable Modifikation $\{\widetilde{X}_t\}_{t\ge 0}$.

Bemerkung 8.1. Sei $\{X_t\}_{t\ge 0}$ separabel und $S \subset [0,\infty)$ separierend. Dann gilt für jede (offene) Teilmenge $I \subset [0,\infty)$ und für beliebiges $t_0 \in [0,\infty)$:

a) $\inf\limits_{t\in I} X_t \;=\; \inf\limits_{s\in I\cap S} X_s\,, \qquad \sup\limits_{t\in I} X_t \;=\; \sup\limits_{s\in I\cap S} X_s\,;$

b) $\underline{\lim}_{t\to t_0} X_t \;=\; \underline{\lim}_{\substack{s\to t_0\\ s\in S}} X_s\,, \qquad \overline{\lim}_{t\to t_0} X_t \;=\; \overline{\lim}_{\substack{s\to t_0\\ s\in S}} X_s\,.$

Satz 8.1. (*Doob*) *Sei* $\{X_t\}_{t\ge 0}$ *ein reellwertiger stochastischer Prozess. Dann gibt es eine separable Modifikation* $\{\widetilde{X}_t\}_{t\ge 0}$.

Zunächst beweisen wir:

Lemma 8.1. *Sei* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *ein reellwertiger stochastischer Prozess*

$\Longrightarrow$ $\exists\, S \subset [0,\infty)$ *abzählbar, dicht* $\forall\, t \geq 0\ \exists\, N_t \in \mathcal{A}$, $P(N_t) = 0$:

Für $\omega \notin N_t\ \exists\, (s_n) \subset S$, $s_n \to t$: $X_{s_n}(\omega) \longrightarrow X_t(\omega) \quad (n \to \infty)$.

Für einen <u>beschränkten</u> stochastischen Prozess $\{X_t\}_{t\geq 0}$ erhalten wir nun die gewünschte Modifikation:

Lemma 8.2. *Sei* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *ein stochastischer Prozess auf* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *mit*

$$a \;<\; X_t(\omega) \;<\; b \quad \forall\, t \geq 0 \;\; \forall\, \omega \in \Omega \quad (\exists\, a, b \in \mathbb{R}).$$

Dann gibt es eine <u>*separable*</u> *Modifikation* $\{\widetilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ *von* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *mit*

$$a \;\leq\; \widetilde{X}_t(\omega) \;\leq\; b \quad \forall\, t \geq 0 \;\; \forall\, \omega \in \Omega.$$

Der Beweis von Satz 8.1 lässt sich auf den beschränkten Fall zurückführen. Allerdings ist es notwendig, Modifikationen $\{\widetilde{X}_t\}$ zuzulassen, die (mit Wahrscheinlichkeit 0) die Werte $\pm\infty$ annehmen können.

Bemerkung 8.2. Gibt es zu einem <u>separablen</u> stochastischen Prozess $\{X_t\}_{t\geq 0}$ einen <u>äquivalenten</u> Prozess $\{\widetilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ mit stetigen (rechtsstetigen) Pfaden, so besitzt $\{X_t\}$ eine stetige (rechtsstetige) Modifikation.

Beispiel 2.3 (Fortsetzung) Sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ eine <u>separable</u> Markov-Kette mit Zustandsraum $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = \big(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})\big)$ und Übergangsmatrizen

$$\mathbb{P}(t) \;=\; e^{t\mathbb{A}}, \quad \mathbb{A} \;=\; \big(\!\big(a_{ij}\big)\!\big), \quad a_{ij} \;=\; \begin{cases} \lambda_{ij}, & i \neq j, \\ -\lambda_{ii}, & i = j, \end{cases}$$

wobei $\lambda_{ij} \geq 0$, $\lambda_{ii} = \sum\limits_{j\neq i} \lambda_{ij}$, $\sum\limits_{j} |\,\lambda_{ij}\,| \leq c \;\; \forall\, i$.

<u>Interpretation der infinitesimalen Parameter λ_{ii}</u>:

Sei V_t die Verweilzeit in dem Zustand, der zur Zeit t eingenommen wird, d.h.

$$V_t \;=\; \inf\{s > 0 : X_{t+s} \neq X_t\}, \quad \inf\emptyset \;:=\; +\infty.$$

Dann gilt:

$$P(V_t > v \,|\, X_t = i) \;=\; e^{-\lambda_{ii} v} \quad (v > 0),$$

d.h. V_t ist (bedingt) $Exp(\lambda_{ii})$-verteilt, <u>unabhängig</u> von t !