9 Weitere Eigenschaften Brown'scher Bewegungen

Für weitere Anwendungen untersuchen wir in diesem Paragraphen mehrdimensionale Brown'sche Bewegungen, die sogar (im Hinblick auf Martingaleigenschaften) bezüglich einer Filtration $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$ definiert sind:

Definition 9.1. *Ein stochastischer Prozess* $\{W_t^{(d)}\}_{t\geq 0}$ *auf* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *mit Zustandsraum* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ *heißt* *d-dimensionaler Wiener-Prozess* *(oder auch* *d-dimensionale Brownsche Bewegung*) *bezüglich einer Filtration* $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$ $(\subset \mathcal{A})$, *wenn gilt:*

(i) $W_0^{(d)} = \underline{0}$ *P-f.s.*, $t \longmapsto W_t^{(d)}(\omega)$ *ist stetig* $\forall\, \omega \notin N$, $P(N) = 0$;

(ii) $\forall\, 0 \leq s < t:$ $W_t^{(d)} - W_s^{(d)}$ *ist unabhängig von* $\mathcal{A}_s$;

(iii) $\forall\, 0 \leq s < t:$ $P_{W_t^{(d)} - W_s^{(d)}} = N(0, t-s) \otimes \cdots \otimes N(0, t-s)$ *(d Faktoren)*, *wobei* $N(0, h)$ *die Normalverteilung mit E.W. 0 und Varianz h bezeichnet*;

(iv) $W_t^{(d)}$ *ist* $\mathcal{A}_t$*-messbar* $\forall\, t \geq 0$.

Bemerkung 9.1.

a) Jeder (reelle) (Standard-) Wiener-Prozess $\{W_t\}_{t\geq 0}$ besitzt eine Modifikation $\{\widetilde{W}_t\}_{t\geq 0}$, die ein Wiener-Prozess ist bezüglich der kanonischen Filtration $\{\mathcal{A}_t^0\}_{t\geq 0}$ mit $\mathcal{A}_t^0 = \mathcal{A}(W_s; s \leq t)$. Hierbei kann o.E. angenommen werden, dass die üblichen Bedingungen gelten:

   (i^0) $\mathcal{N} := \{N \subset \Omega \mid \exists\, A_0 \in \mathcal{A},\ N \subset A_0,\ P(A_0) = 0\} \subset \mathcal{A}_t^0 \quad \forall\, t \geq 0$ „Augmentation",

   (ii^0) $\mathcal{A}_t^0 = \bigcap_{s>t} \mathcal{A}_s^0 \quad \forall\, t \geq 0$ „Rechtsstetigkeit";

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, c_n = c_n(d):\ E\,|\,W_h^{(d)}\,|^{2n} = c_n\, h^n$

   $\Longrightarrow$ $\exists$ Modifikation $\{\widetilde{W}_t^{(d)}\}_{t\geq 0}$ des d-dimensionalen Wiener-Prozesses mit P-f.s. Hölder-stetigen Pfaden der Ordnung $\gamma < \frac{1}{2}$;

c) $\{W_t^{(d)}\}_{t\geq 0}$ d-dimensionaler Wiener-Prozess bezüglich $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$

   $\Longrightarrow$ $\{\widetilde{W}_t^{(d)}\}_{t\geq 0} = \{W_{t_0+t}^{(d)} - W_{t_0}^{(d)}\}_{t\geq 0}$ ist d-dimensionaler Wiener-Prozess bezüglich $\{\widetilde{\mathcal{A}}_t\}_{t\geq 0} = \{\mathcal{A}_{t_0+t}\}_{t\geq 0}$;

d) Mit $\{W_t^{(d)}\}_{t\geq 0}$ ist auch $\{-W_t^{(d)}\}_{t\geq 0}$ d-dimensionaler Wiener-Prozess bezüglich $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$;

e) Ist $\{W_t^{(d)}\}_{t\geq 0}$ ein d-dimensionaler Wiener-Prozess, $W_t^{(d)} = \big(W_t^1, \ldots, W_t^d\big)$, so sind die $\{W_t^j\}_{t\geq 0}$ eindimensionale Wiener-Prozesse $(j = 1, \ldots, d)$ bezüglich derselben Filtration.

f) $\{W_t^{(d)}\}_{t\geq 0}$ d-dimensionaler Wiener-Prozess bezüglich $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$

$$\Longrightarrow \quad Cov\big(W_s^{(d)}, W_t^{(d)}\big) \; = \; Diag^{(d)}(s \wedge t, \ldots, s \wedge t)\,.$$

Brown'sche Bewegungen führen zu einer Vielzahl von Martingalen. Hierzu eine Reihe von Beispielen:

Satz 9.1. $\{W_t^{(d)}\}_{t\geq 0}$ *sei ein* d*-dimensionaler Wiener-Prozess bezüglich* $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$. *Dann gilt*:

a) $\big\{\,|\, W_t^{(d)}\,|^2 - d\,t\big\}_{t\geq 0}$ *ist ein Martingal bezüglich* $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$;

b) $\Big\{ \exp\Big(i\,\big\langle u, W_t^{(d)}\big\rangle + t\,\dfrac{|\,u\,|^2}{2}\Big)\Big\}_{t\geq 0}$ *ist ein Martingal bezüglich* $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$ (i : *imaginäre Einheit*).

Bemerkung 9.2. Ein Satz von Lévy (1948) besagt sogar, dass sich reelle Brown'sche Bewegungen durch Martingaleigenschaften charakterisieren lassen:

Sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein quadratintegrierbarer stochastischer Prozess mit P-f.s. stetigen Pfaden. Sind dann $\{X_t\}_{t\geq 0}$ und $\{X_t^2 - t\}_{t\geq 0}$ Martingale bezüglich $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$, so ist $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein (reeller) Wiener-Prozess bezüglich $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$.

Das Fluktuationsverhalten von Wiener-Prozessen lässt sich für $t \to \infty$ und $t \to 0$ sehr genau beschreiben. Wir erinnern hierzu an das Gesetz vom iterierten Logarithmus:

Satz 9.2. *Sei* $\{W_t\}_{t\geq 0}$ *ein reeller Wiener-Prozess. Dann gilt*:

a) $$\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log\log t}} \; = \; +1 \quad P\text{-}f.s.$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log\log t}} \; = \; -1 \quad P\text{-}f.s.$$

b) $$\limsup_{t\to 0+} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log\log \frac{1}{t}}} \; = \; +1 \quad P\text{-}f.s.$$

$$\liminf_{t\to 0+} \frac{W_t}{\sqrt{2t\log\log \frac{1}{t}}} \; = \; -1 \quad P\text{-}f.s.$$

Bemerkung 9.3.

a) Es genügt, die 1. Aussage in a) zu beweisen, denn mit $\{W_t\}_{t\geq 0}$ sind auch $\{-W_t\}_{t\geq 0}$, $\left\{t\,W\left(\frac{1}{t}\right)\right\}_{t\geq 0}$, $\left\{-t\,W\left(\frac{1}{t}\right)\right\}_{t\geq 0}$, $\left(0\,W\left(\frac{1}{0}\right) := 0\right)$ wieder Wiener-Prozesse.

b) Satz 9.2 b) zeigt, dass die Ordnung $\frac{1}{2}$ der Hölder-Stetigkeit des Wiener-Prozesses nicht zu $\frac{1}{2}+\delta$ $(\delta > 0)$ verbessert werden kann (vgl. auch Bauer (2002), Satz 47.3).

c) Als Korollar ergibt sich, dass die Pfade des (d-dimensionalen) Wiener-Prozesses P-f.s. nirgends differenzierbar sind. Insbesondere sind die Pfade P-f.s. von unbeschränkter Variation auf jedem kompakten Intervall $[0,t]$ $(t > 0)$. Es gilt nämlich (vgl. Bauer (2002), Satz 47.6):

Sei $\{W_t^{(d)}\}_{t\geq 0}$ ein d-dimensionaler Wiener-Prozess, $0 \leq s < t$ fest, und sei $\mathcal{Z} := (s = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t)$ eine Unterteilung von $[s,t]$ der Feinheit $\delta(\mathcal{Z}) := \max\limits_{j=1,\dots,n} |\,t_j - t_{j-1}\,|$.

Dann gilt für $\delta(\mathcal{Z}) \to 0$:

$$V_{\mathcal{Z}} \;:=\; \sum_{j=1}^{n} \left|\, W_{t_j}^{(d)} - W_{t_{j-1}}^{(d)} \,\right|^2 \;\xrightarrow{\mathcal{L}^2}\; d\,(t-s)\,.$$

Sprechweise: Man sagt, dass der d-dimensionale Wiener-Prozess ein Prozess ist mit endlicher quadratischer Variation (über jedem Intervall $[s,t]$). Letztere ist gleich $d\,(t-s)$!

Korollar 9.1. *Seien* $\{W_t^{(d)}\}_{t\geq 0}$, $\mathcal{Z}$ *wie oben und*

$$V_{\mathcal{Z}}^{(1)} \;:=\; \sum_{j=1}^{n} \left|\, W_{t_j}^{(d)} - W_{t_{j-1}}^{(d)} \,\right|, \quad M_{\mathcal{Z}} \;:=\; \max_{j=1,\dots,n} \left|\, W_{t_j} - W_{t_{j-1}} \,\right|.$$

Dann gilt: $V_{\mathcal{Z}} \;\leq\; M_{\mathcal{Z}}\, V_{\mathcal{Z}}^{(1)}$, *aber* $\sup\limits_{\mathcal{Z}} V_{\mathcal{Z}}^{(1)} \;=\; +\infty$ *P-f.s.*

Da d-dimensionale Brown'sche Bewegungen unabhängige, stationäre Zuwächse besitzen, genügen sie der schwachen Markov-Eigenschaft bezüglich der kanonischen Filterung $\{\mathcal{A}_t^0\}_{t\geq 0} = \{\mathcal{A}(W_s^{(d)};\; s \leq t)\}_{t\geq 0}$, d.h., es gilt für $0 \leq s < t$, $B \in \mathcal{B}^d$:

$$P\big(W_t^{(d)} \in B \,\big|\, \mathcal{A}_s^0\big) \;=\; P_{t-s}\big(W_s^{(d)}, B\big)\,,$$

wobei $P_h(x,B) = P\big(W_h^{(d)} + x \in B\big)$ die kanonische Faltungshalbgruppe von Übergangswahrscheinlichkeiten bezeichnet.

Wir werden sehen, dass sich diese Eigenschaft auch auf zufällige Zeitpunkte überträgt.

Satz 9.3. $\{W_t^{(d)}\}_{t\geq 0}$ *sei ein d-dimensionaler Wiener-Prozess mit* <u>*stetigen Pfaden*</u> *bezüglich einer Filterung* $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$, *die den* <u>*üblichen Bedingungen*</u> *genüge.*
Dann gilt für jede Stoppzeit τ *bezüglich* $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$ *und jedes* $h > 0$, $B \in \mathcal{B}^d$:

$$P\big(W_{\tau+h}^{(d)} \in B \,\big|\, \mathcal{A}_\tau\big) \;=\; P_h\big(W_\tau^{(d)}, B\big) \quad P\text{-f.s. auf } \{\tau < \infty\},$$

d.h.

$$P\big(A \cap \{W_{\tau+h}^{(d)} \in B\}\big) \;=\; \int_A P_h\big(W_\tau^{(d)}(\omega), B\big)\, dP(\omega) \quad \forall\, A \in \{\tau < \infty\} \cap \mathcal{A}_\tau .$$

Bemerkung 9.4. Mit denselben Beweismethoden lässt sich zeigen:

Satz 9.4. $\{W_t^{(d)}\}_{t\geq 0}$ *sei ein d-dimensionaler Wiener-Prozess mit stetigen Pfaden bezüglich der Filterung* $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$, *die den üblichen Bedingungen genüge, und* τ *sei eine Stoppzeit mit* $P(\tau < \infty) = 1$. *Setzt man*

$$\widetilde{W}_t^{(d)} \;:=\; \begin{cases} W_{\tau+t}^{(d)} - W_\tau, & \text{auf } \{\tau < \infty\}, \\ \underline{0}, & \text{sonst}, \end{cases}$$

so ist $\{\widetilde{W}_t^{(d)}\}_{t\geq 0}$ *wieder ein d-dimensionaler Wiener-Prozess (bezüglich seiner kanonischen Filterung) und* <u>*unabhängig*</u> *von* $\mathcal{A}_\tau$, *d.h.,* $\mathcal{A}_\tau$ *und* $\mathcal{A}\big(\widetilde{W}_t^{(d)}; t \geq 0\big)$ *sind unabhängige* σ*-Algebren.*

Folgerungen. Sei $\{W_t\}_{t\geq 0}$ ein reeller Wiener-Prozess mit <u>stetigen Pfaden</u>:

a) Für $a \in \mathbb{R}$ betrachte man $\tau_a := \inf\{t \geq 0 : W_t = a\}$. Dann gilt:

$$P(\tau_a \leq t) \;=\; 2\,P(W_t > |a|) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_{|a|}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dx .$$

b) Für $M_t := \sup\limits_{0\leq s\leq t} W_t$ und $a \geq 0$ gilt das folgende „<u>Spiegelungsprinzip</u>“:
Sei $B \subset (-\infty, a]$, $B \in \mathcal{B}^1$, und $\widetilde{B} = 2a - B$ („Spiegelbild“), so folgt

$$P(W_t \in B, M_t \geq a) \;=\; P(W_t \in \widetilde{B}), \quad \text{insbesondere}$$

$$P(M_t \geq a) \;=\; 2\,P(W_t \geq a).$$

c) Sei nun $\{W_t^{(d)}\}_{t\geq 0}$ ein d-dimensionaler Wiener-Prozess mit stetigen Pfaden und

$$\tau_r \;=\; \inf\left\{t \geq 0 : \;\left| W_t^{(d)} \right| = r\right\} \quad (r \geq 0,\ \text{fest})\,,$$

die „Zeit des ersten Durchgangs durch die Sphäre“ $S_r = \{x \in \mathbb{R}^d : \; |x| = r\}$.

Wegen der Stetigkeit der Pfade erhält man

$$\tau_r \;=\; \inf\left\{t \geq 0 : \;\left| W_t^{(d)} \right| \underset{(=)}{\geq} r\right\}$$

und somit ist τ_r eine Stoppzeit bzgl. der augmentierten kanonischen Filterung. Wir zeigen:

$$E\,\tau_r \;=\; \frac{r^2}{d}\,.$$

Insbesondere gilt daher $P(\tau_r < \infty) = 1$.

Abschließend untersuchen wir noch die Erstaustrittszeiten von eindimensionalen Wiener-Prozessen mit stetigen Pfaden aus offenen Intervallen (a,b) mit $a < 0 < b$ (vgl. die Skorohod-Einbettung): Sei

$$\tau \;=\; \tau(a,b) \;:=\; \inf\{t \geq 0 : \; W_t \notin (a,b)\}\,.$$

Dann gilt: τ ist Stoppzeit bezüglich der augmentierten kanonischen Filterung mit

$$E\,\tau \;=\; |\,ab\,|\,,$$

$$P(W_\tau = a) \;=\; \frac{b}{b + |\,a\,|}\,, \qquad P(W_\tau = b) \;=\; \frac{|\,a\,|}{b + |\,a\,|}.$$

Bemerkung 9.5. Allgemeiner erhält man für jede integrierbare Stoppzeit eines reellen Wiener-Prozesses bezüglich der augmentierten kanonischen Filterung und mit stetigen Pfaden die Beziehungen:

$$E\,W_\tau \;=\; 0 \quad \text{und} \quad E\,W_\tau^2 \;=\; E\,\tau\,.$$