Prof. Dr. Josef G. Steinebach Sommersemester 2014

1. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie II“

Abgabe: Mittwoch, den 23.04.2014, um 09:55 Uhr in Seminarraum 1

Aufgabe 1.1 (mündlich) [Momentenmethode]

Die Zufallsvariablen $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seien jeweils $\mathrm{Exp}(\lambda_n)$-verteilt und es gelte $\lambda_n \to \lambda > 0$. Zeigen Sie mit Hilfe der Momentenmethode, dass gilt:

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \quad (n \to \infty), \quad \text{wobei} \quad P_Z = \mathrm{Exp}(\lambda).$$

Aufgabe 1.2 (4 Punkte) [Laplace-Transformierte, Momente]

Beweisen Sie Satz 2.1 a) der Vorlesung.

Aufgabe 1.3 (5 Punkte) [Bestimmung durch Momente]

Sei Y eine reelle Zufallsvariable mit $P_Y = N(0,1)$ und sei $X := e^Y$. Zeigen Sie:

a) Alle Momente von X existieren.

b) Die Verteilung P_X ist *nicht* durch ihre Momente bestimmt.

Hinweis: Man betrachte $g(x) = f(x)\,(1 + \sin(2\,\pi\log(x)))$, wobei $P_X = f\,\lambda^1$ sei.

Aufgabe 1.4 (3 Punkte) [Faltung]

Zeigen Sie, dass die Summe $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$ von n unabhängigen, $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ die folgende λ^1-Dichte besitzt:

$$f_n(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\, t^{n-1}\, e^{-\lambda\, t}\, I_{(0,\infty)}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$