Prof. Dr. Josef G. Steinebach Sommersemester 2014

10. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie II“

Abgabe: Mittwoch, den 02.07.2014, um 09:55 Uhr in Seminarraum 1

Aufgabe 10.1 (mündlich) [Ehrenfest-Urnenmodell]

Seien $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, N\}$ und $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette auf $\mathcal{X}$ mit

$$p(i, i+1) = \frac{N-i}{N} \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \quad \text{und} \quad p(i, i-1) = \frac{i}{N} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, N.$$

Bestimmen Sie die eindeutige stationäre Verteilung dieser Markovkette und begründen Sie deren Existenz.

Aufgabe 10.2 (4 Punkte) [Rückkehrzeiten]

Sei auf $\mathcal{X} = \{1, \ldots, 5\}$ die folgende Übergangsmatrix gegeben:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die erwartete Rückkehrzeit der zugehörigen Markovkette in jedem Punkt von $\mathcal{X}$.

Aufgabe 10.3 (3 Punkte) [Stationäre Maße]

Sei $\mathcal{X}$ irreduzibel und rekurrent. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\mu_x(y)\, \mu_y(z) = \mu_x(z),$$

wobei μ_x (bzw. entsprechend μ_y) das Maß aus Satz 13.2 ist.

Aufgabe 10.4 (5 Punkte) [Irreduzibilität, positive Rekurrenz]

Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit abzählbarem Zustandsraum $\mathcal{X}$ und sei $\mathcal{X}$ irreduzibel und positiv-rekurrent. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathcal{X}$ gilt:

$$E_x T_y < \infty.$$