Prof. Dr. Josef G. Steinebach Sommersemester 2014

11. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie II"

Abgabe: Mittwoch, den 09.07.2014, um 09:55 Uhr in Seminarraum 1

Aufgabe 11.1 (mündlich) [MA(∞)-Zeitreihen]

Beweisen Sie, dass für jedes feste $n \in \mathbb{Z}$ die Reihe in der MA(∞)-Darstellung von X_n aus dem Beispiel 14.2 der Vorlesung P-f.s. und auch in $\mathcal{L}^2(P)$ konvergiert.

Aufgabe 11.2 (4 Punkte) [Ergodizität]

Ist für jede maßerhaltende, ergodische Transformation T auch T^2 maßerhaltend und ergodisch?
Hinweis: Betrachten Sie die Markovkette mit Zustandsraum $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ und Übergangswahrscheinlichkeiten $p(x, 1-x) = 1$, $x \in \mathcal{X}$. Wie sieht die stationäre Verteilung aus?

Aufgabe 11.3 (3 Punkte) [Stationarität]

Sei X eine $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$-Zufallsvariable und T eine maßerhaltende Transformation auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $X_{n+1} := X_n \circ T$ mit $X_0 := X$. Zeigen Sie, dass die Folge $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ stationär ist.

Aufgabe 11.4 (5 Punkte) [Ergodensatz]

Sei T eine messbare Abbildung auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Die Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{A}$, unter denen T maßerhaltend ist, bilden eine konvexe Menge $\mathcal{C}$. Zeigen Sie, dass T genau dann unter P ergodisch ist, wenn P keine „Ecke" von $\mathcal{C}$ bildet (d.h., wenn P sich *nicht* darstellen lässt als $\sum_{i=1}^n a_i P_i$ mit $n \in \mathbb{N}$, $a_i > 0$, $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, $P_i \in \mathcal{C}$ und $P_i \neq P$ für mindestens ein i).