12. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie II“

Abgabe: Mittwoch, den 16.07.2014, um 09:55 Uhr in Seminarraum 1

Aufgabe 12.1 (mündlich) [Skalierungseigenschaft von Wiener-Prozessen]

Für einen Wiener-Prozess $\{W(t) : t \geq 0\}$ gilt folgende Skalierungseigenschaft:

$$\{W(c\,t) : t \geq 0\} \overset{\mathcal{D}}{=} \{\sqrt{c}\, W(t) : t \geq 0\} \quad (c > 0, \text{ fest}),$$

d.h., die endlich-dimensionalen Verteilungen der beiden Prozesse stimmen überein.

Aufgabe 12.2 (4 Punkte) [Transformation von Wiener-Prozessen]

Sei $\{W(t) : t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Cov}(W(s), W(t)) = \min\{s, t\}, \quad s, t \geq 0;$

b) $B(t) := (1-t)W(t/(1-t))$ für $0 \leq t < 1$ und $B(1) := 0$ definiert eine Brown'sche Brücke;

c) $\limsup_{t\to 0} W(t)/\sqrt{2\,t\,\log\log(1/t)} = 1$ P-f.s.

Aufgabe 12.3 (5 Punkte) [Erstaustrittszeiten des Wiener-Prozesses]

Sei $\{W(t) : t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess mit stetigen Pfaden auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie:

a) $\tau_a := \inf\{t : W(t) = a\}$ ist eine Stoppzeit bezüglich der kanonischen Filtration.

b) $P(\tau_a \leq t) = \sqrt{2/\pi}\int_{a/\sqrt{t}}^{\infty} \exp(-y^2/2)\,dy, \quad t > 0 \quad (a > 0, \text{ fest}).$
Berechnen Sie hieraus die λ^1-Dichte von τ_a.

c) $P(\tau_a < \infty) = 1.$

Aufgabe 12.4 (3 Punkte) [Martingaleigenschaft von Wiener-Prozessen]

Beweisen Sie Bemerkung 18.2. der Vorlesung.