Prof. Dr. Josef G. Steinebach Sommersemester 2014

2. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie II“

Abgabe: Mittwoch, den 30.04.2014, um 09:55 Uhr in Seminarraum 1

Aufgabe 2.1 (mündlich) [stabile Verteilung]

Seien $I_n(\varepsilon)$ und $\hat{S}_n(\varepsilon)$ definiert wie in § 4 der Vorlesung (s. S. 12 unten). Zeigen Sie, dass die bedingte Verteilung von $\hat{S}_n(\varepsilon)/n^{1/\alpha}$ gegeben $|I_n(\varepsilon)| = k$ $(\in \{0, 1, \ldots, n\})$ die Verteilung einer Summe von k i.i.d. Zufallsvariablen mit symmetrischer Verteilungsfunktion F_n^{ε} ist, wobei

$$1 - F_n^{\varepsilon}(x) = P\left(X_1/n^{1/\alpha} > x \,\middle|\, |X_1|/n^{1/\alpha} > \varepsilon\right) = x^{-\alpha}/\left(2\varepsilon^{-\alpha}\right) \quad \text{für} \quad x \geq \varepsilon.$$

Aufgabe 2.2 (6 Punkte) [Poisson-Prozess, Rekurrenzzeiten]

Sei $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozess mit Rate λ. Dann sind laut Bemerkung 3.4 der Vorlesung die Wartezeiten $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i.i.d. Exp(λ)-verteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass sich mit der Notation gemäß (3.1) der Vorlesung ergibt:

a) Für die Rekurrenzzeiten $U(t) := t - T_{N(t)}$ und $V(t) := T_{N(t)+1} - t$ $(t > 0)$ gilt:

   i) $P(V(t) \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$;
   ii) $P(U(t) \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$ für $0 \leq x < t$.

b) Für $X_{N(t)+1} = U(t) + V(t)$ $(t > 0)$ gilt:

   i) $EX_{N(t)+1} > \frac{1}{\lambda} = EX_1$;
   ii) $\lim_{t\to\infty} EX_{N(t)+1} = 2 \cdot EX_1$.

Aufgabe 2.3 (6 Punkte) [Verteilungskonvergenz]

Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, $R[-1, 1]$-verteilter Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass sich für

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{sgn}(X_i)}{|X_i|^p}, \quad n \in \mathbb{N},$$

die folgenden Verteilungskonvergenzen ergeben:

a) Falls $p < 1/2$, so gilt $S_n/\sqrt{n} \xrightarrow{\mathcal{D}} Y \quad (n \to \infty)$;

b) falls $p = 1/2$, so gilt $S_n/\sqrt{n\,\log(n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} Y \quad (n \to \infty)$;

c) falls $p > 1/2$, so gilt $S_n/n^p \xrightarrow{\mathcal{D}} Y \quad (n \to \infty)$,

wobei Y jeweils eine nicht-degenerierte Zufallsvariable ist.

Hinweis: Für $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. mit $P(X_1 > x) = P(X_1 < -x)$ und $P(|X_1| > x) = x^{-2}$ $(x \geq 1)$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} X_i/\sqrt{n\log(n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \quad (n \to \infty)$, wobei $P_Z = N(0, 1)$ ist (vgl. Durrett (2010), Bsp. 3.4.8).