Prof. Dr. Josef G. Steinebach Sommersemester 2014

3. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie II“

Abgabe: Mittwoch, den 07.05.2014, um 09:55 Uhr in Seminarraum 1

Aufgabe 3.1 (mündlich) [Stabile Verteilungen]

Zeigen Sie, dass die Poisson-Verteilung zwar unbegrenzt teilbar, jedoch nicht stabil ist.

Aufgabe 3.2 (4 Punkte) [Cramér-Wold-Idee]

Beweisen Sie Satz 5.4 der Vorlesung.

Hinweis: Verwenden Sie die Idee von Cramér-Wold (vgl. Stetigkeitssatz in $\mathbb{R}^k$ der Vorlesung).

Aufgabe 3.3 (3+2 Punkte) [Unabhängigkeit von Zufallsvektoren]

Seien X und Y k-dimensionale Zufallsvektoren. Zeigen Sie:

a) X und Y sind genau dann unabhängig, wenn $f(X)$ und $g(Y)$ unkorreliert sind für alle beschränkten und stetigen Funktionen $f, g:\ \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

b) Aus $P_{e_i \cdot X} = P_{e_i \cdot Y}$ für alle kanonischen Einheitsvektoren e_i $(i = 1, \ldots, k)$ folgt im Allgemeinen *nicht*, dass $P_X = P_Y$ gilt.

Aufgabe 3.4 (3 Punkte) [Lokaler ZGWS für die Multinomialverteilung]

Beweisen Sie Korollar 5.1 der Vorlesung.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass sich für k unabhängige, π_{np_j}-verteilte Zufallsvariablen $Z_{n,j}$ $(j = 1, \ldots, k)$ ergibt:

$$P(Y_{n,1} = \ell_1, \ldots, Y_{n,k} = \ell_k) = \frac{\prod_{j=1}^{k} P(Z_{n,j} = \ell_j)}{P\left(\sum_{j=1}^{k} Z_{n,j} = n\right)} \quad \text{für} \quad \ell_j \in \mathbb{N}_0,\ \sum_{j=1}^{k} \ell_j = n.$$