4. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie II“

Abgabe: Mittwoch, den 14.05.2014, um 09:55 Uhr in Seminarraum 1

Aufgabe 4.1 (mündlich) [Convergence of Types]

Gegeben seien eine Folge reller Zufallsvariablen $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sowie zwei positive reelle Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Für ein $\lambda \in \mathbb{N}$ und $n \to \infty$ gelte

$$a_n M_n - b_n \xrightarrow{\mathcal{D}} G \quad \text{und} \quad a_n M_{n^\lambda} - b_n \xrightarrow{\mathcal{D}} G,$$

wobei G eine nicht-degenerierte Zufallsvariable bezeichne. Zeigen Sie, dass für $n \to \infty$ gilt:

$$\frac{a_n}{a_{n^\lambda}} \to 1 \quad \text{und} \quad \frac{a_n}{a_{n^\lambda}} b_{n^\lambda} - b_n \to 0\,.$$

Aufgabe 4.2 (2+2 Punkte) [Bedingter Erwartungswert bei Zerlegungen]

Die Zufallsvariable X auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei nicht-negativ oder P-integrierbar und $\{C_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ sei eine disjunkte Zerlegung von Ω mit $P(C_j) > 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass für die von $\{C_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ erzeugte Teil-σ-Algebra $\mathcal{C} = \mathcal{A}(C_j : j \in \mathbb{N})$ gilt:

$$\mathcal{C} = \Big\{ \sum_{j\in J} C_j \,\Big|\, J \subset \mathbb{N} \Big\}.$$

b) Bestimmen Sie eine Version von $E(X|\mathcal{C})$.

Aufgabe 4.3 (4 Punkte) [Bedingter Erwartungswert]

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2, N(0, I_2))$, also $P = f\lambda^2$ mit

$$f(u,v) = \frac{1}{2\pi} \exp\Big(-\Big(u^2+v^2\Big)/2\Big), \quad u, v \in \mathbb{R},$$

und sei $X : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ P-integrierbar. Geben Sie eine Version von $E(X|\mathcal{C})$ an für

$$\mathcal{C} := \Big\{ C \in \mathcal{B}^2 \,|\, (u,v) \in C \;\Leftrightarrow\; (-u,v) \in C \Big\}.$$

Aufgabe 4.4 (2+2 Punkte) [Projektionseigenschaft, bedingte Varianz]

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{C}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ und $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie:

a) $\|X - E(X|\mathcal{C})\|_2 = \min_{Y\in\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{C},P)} \|X - Y\|_2$, das heißt, $E(X|\mathcal{C})$ ist die Projektion von X auf den Teilraum $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{C}, P)$ der $\mathcal{C}$-messbaren Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

b) $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(E(X|\mathcal{C})) + E(\mathrm{Var}(X|\mathcal{C}))$, wobei $\mathrm{Var}(X|\mathcal{C}) := E(X^2|\mathcal{C}) - (E(X|\mathcal{C}))^2$ P-f.s. Insbesondere gilt: $\mathrm{Var}(X) \geq \mathrm{Var}(E(X|\mathcal{C}))$.

Hinweis: Verwenden Sie die Jensen-Ungleichung (Eigenschaft 14 auf Seite 30 des Skripts).