6. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie II“

Abgabe: Mittwoch, den 28.05.2014, um 09:55 Uhr in Seminarraum 1

Aufgabe 6.1 (mündlich) [Stoppzeiten]

Beweisen Sie die Aussagen in Beispiel 9.1 a) bis d) der Vorlesung.

Aufgabe 6.2 (5 Punkte) [Doob-Zerlegung]

$\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\mathrm{Var}(Y_n) = \sigma_n^2$ $(n \in \mathbb{N})$. Außerdem sei $\{(S_n, \mathcal{A}_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal, wobei

$$S_n = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \sum_{i=1}^n Y_i, & n \geq 1, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{A}_n = \begin{cases} \{\emptyset, \Omega\}, & n = 0, \\ \mathcal{A}(Y_1, \ldots, Y_n), & n \geq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) Es existiert genau dann eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen derart, dass $\{S_n^2 - \sum_{i=1}^n a_i\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ $(\sum_{i=1}^0 a_i := 0)$ ein Martingal bezüglich $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert, wenn gilt:

$$E\left(Y_{n+1}^2 \middle| \mathcal{A}_n\right) = a_{n+1} = \sigma_{n+1}^2 \quad P\text{-f.s.} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0. \tag{$*$}$$

b) Die Bedingung in a) ist insbesondere dann erfüllt, wenn $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine unabhängige Folge ist.

c) Unter $(*)$ ist $\{S_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal bezüglich $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit Kompensator $\{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2\}_{n\in\mathbb{N}}$, wobei man mit den Bezeichnungen aus Satz 8.1 der Vorlesung die dortige Folge $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ als *Kompensator* des Submartingals $\{(X_n, \mathcal{A}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte) [Martingale]

Sei $\{(X_n, \mathcal{A}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $|X_1| \leq C$ und $|X_{n+1} - X_n| \leq C$ für alle $n \geq 1$ und ein $C > 0$. Sei weiter $\tau : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ eine Stoppzeit bezüglich $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $E\tau < \infty$. Zeigen Sie: X_τ ist integrierbar mit $EX_\tau = EX_1$.

Aufgabe 6.4 (3 Punkte) [Optional Stopping]

Sei $\{(X_n, \mathcal{A}_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $X_0 \equiv c$ und $0 \leq X_n \leq d$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $(c, d > 0,$ fest$)$. Zeigen Sie, dass für jede P-f.s. endliche Stoppzeit $\tau : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}_0$ bezüglich $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ gilt: $P(X_\tau = d) \leq c/d$.