7. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie II“

Abgabe: Mittwoch, den 04.06.2014, um 09:55 Uhr in Seminarraum 1

Aufgabe 7.1 (mündlich) [Martingale]

Sei $\{(X_n, \mathcal{A}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal mit $X_0 = 0$ und $EX_n^2 < \infty \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$P\Big(\max_{1\le i\le n} X_i \ge \lambda\Big) \le \frac{EX_n^2}{EX_n^2 + \lambda^2} \quad (\lambda \ge 0).$$

Aufgabe 7.2 (3 Punkte) [0-1-Gesetze]

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration. Zeigen Sie:

a) Gilt $\mathcal{A}_n \uparrow \mathcal{A}_\infty$ und $A \in \mathcal{A}_\infty$, dann folgt $E(I_A|\mathcal{A}_n) \to I_A$ P-f.s. (0-1-Gesetz von Lévy).

b) Folgern Sie hieraus das 0-1-Gesetz von Kolmogorov (siehe den Satz 18.2 im Skript der Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie“, WS 2013/14).

Aufgabe 7.3 (5 Punkte) [Doob's Upcrossing-Lemma]

Seien $\{(X_n, \mathcal{A}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal, $a < b$, reell, und $U_N[a,b] :\; \Omega \to \mathbb{N}_0$ $(N \in \mathbb{N})$ definiert durch

$$U_N[a,b] = \sup\{k \ge 1 :\; \exists\, 1 \le \sigma_1 < \tau_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_k < \tau_k \le N \text{ mit } X_{\sigma_j} \le a,\; X_{\tau_j} \ge b \;\; \forall\, j\},$$

wobei $\sup\emptyset := 0$. $U_N[a,b]$ heißt die *Anzahl der aufsteigenden Überquerungen ("upcrossings") des Intervalls* $[a,b]$ *durch die Folge* $X_1, \ldots, X_N$. Zeigen Sie:

$$E(U_N[a,b]) \le \frac{E(X_N - a)^+}{b-a}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass es sich für $\tau_0 := 0$ bei $\sigma_i = \inf\{j > \tau_{i-1} :\; X_j \le a\} \wedge N$, $\tau_i = \inf\{j > \sigma_i :\; X_j \ge b\} \wedge N$ $(i = 1, 2, \ldots)$ um Stoppzeiten handelt.

Aufgabe 7.4 (4 Punkte) [SLLN für Martingaldifferenzen]

Beweisen Sie das *starke Gesetz der großen Zahlen (SLLN) für Martingaldifferenzenfolgen* gemäß Beispiel 10.1 der Vorlesung.