8. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie II“

Abgabe: Mittwoch, den 18.06.2014, um 09:55 Uhr in Seminarraum 1

Aufgabe 8.1 (mündlich) [Inverses Submartingal]

Konstruieren Sie ein Beispiel für ein inverses Submartingal $\{(X_n, \mathcal{A}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, dessen Grenzvariable X_0 P-f.s. endlich ist, für die jedoch gilt: $E|X_0| = \infty$.

Hinweis: $\{(X_n, \mathcal{A}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *inverses Submartingal*, falls in Definition 10.1 der Vorlesung die Bedingungen (i)–(iii) gelten, aber „$\geq$“ in (iv).

Aufgabe 8.2 (4 Punkte) [Markovkette]

Seien $(\mathcal{X}, \mathcal{P}(\mathcal{X}))$ ein abzählbarer Messraum und $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von $(\mathcal{X}, \mathcal{P}(\mathcal{X}))$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie, dass $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ genau dann eine Markovkette bezüglich der Filtration $\{\mathcal{A}(X_0, \ldots, X_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist, wenn für alle $i_0, \ldots, i_{n+1} \in \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $P(X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) > 0$ gilt:

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n).$$

Aufgabe 8.3 (5 Punkte) [Von weißem Rauschen erzeugte homogene Markovketten]

Seien $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ abzählbare Mengen und sei $f: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ eine Abbildung. Sei weiter $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit Werten in $\mathcal{Y}$. Man definiert nun für eine gegebene Zufallsvariable X_0 mit Werten in $\mathcal{X}$ rekursiv eine Folge von Zufallsvariablen $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$X_{n+1} = f(X_n, Y_{n+1}) \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweisen Sie, dass $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette bildet und bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten $p(x, y) = P(X_{n+1} = y \mid X_n = x)$ für $x, y \in \mathcal{X}$.

Aufgabe 8.4 (4 Punkte) [Starke Markoveigenschaft]

Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit abzählbarem Zustandsraum $\mathcal{X}$. Weiterhin sei $T_y = \inf\{n \geq 1 : X_n = y\}$ für $y \in \mathcal{X}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$P_x(X_n = y) = \sum_{k=1}^{n} P_x(T_y = k) P_y(X_{n-k} = y) \quad \text{für} \quad x, y \in \mathcal{X}.$$