Prof. Dr. Josef G. Steinebach Sommersemester 2014

9. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie II“

Abgabe: Mittwoch, den 25.06.2014, um 09:55 Uhr in Seminarraum 1

Aufgabe 9.1 (mündlich) [Markovkette]

Seien $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = 1/2$. Ferner seien $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ und $M_n = \max\{S_i : i = 0, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *keine* Markovkette bildet.

Aufgabe 9.2 (4 Punkte) [Rekurrenz, Transienz]

Auf $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$ seien die stochastischen Matrizen

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1-p_1 & p_1 \\ 1-p_2 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1-p_1 & p_1 \\ 1-p_2 & 0 & p_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei $p_1, p_2 \in [0, 1]$. Wir betrachten jeweils die zugehörige, in 0 gestartete Markovkette.

a) Bestimmen Sie für P und Q sowie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Markovkette zum Zeitpunkt n zum ersten Mal in den Zustand 0 zurückkehrt.

b) Bestimmen Sie jeweils, ob 0 rekurrent oder transient ist.

c) Bestimmen Sie im Fall der Tansienz die erwartete Anzahl der Besuche in 0.

Aufgabe 9.3 (4 Punkte) [Rekurrenz, starke Markoveigenschaft]

Beweisen Sie Bemerkung 12.1. b) der Vorlesung.

Aufgabe 9.4 (4 Punkte) [Erreichbarkeit von Zuständen]

Beweisen Sie Bemerkung 12.2 der Vorlesung.