Prof. Dr. J. Steinebach
Dipl.-Math. M. Kühn WS 2005/06

1.Übungsblatt zur Zeitreihenanalyse

Abgabe: Donnerstag, 27.10.05, 10^{10} Uhr

Aufgabe 1.1 (mündlich) [Stationarität, Gauß-Prozesse]
Sei $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess. Finden Sie Funktionen $g, h : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, s.d. durch

$$U(t) = g(t)W(h(t)), \ \ \forall\, t \geq 0$$

ein stationärer Gauß-Prozess gegeben wird und geben Sie dessen Autokorrelationsfunktion an.

Aufgabe 1.2 (2+2 Punkte) [Konvergenz in $\mathcal{L}^2$, Autokovarianzfunktion]
Sei $\{X_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ ein standardisierter zentrierter Prozess mit Autokovarianzfunktion γ. Weiter seien $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ und $\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ reelle Zahlenfolgen.

a) Zeigen Sie, dass $Y_n := \sum_{k=1}^n a_k X_k$ im quadratischen Mittel konvergiert, falls

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_i\, a_j\, \gamma(i-j)$$

absolut konvergiert.

b) Zeigen Sie: Falls $\{b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ absolut konvergent ist und

$$X_m = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j\, e_{m-j}, \quad \{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \sim WN(0,\sigma^2),$$

so gilt:

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty.$$

Aufgabe 1.3 (3+1 Punkte) [Trend, Filter]

a) Zeigen Sie, dass ein linearer Filter $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ polynomiale Trends $m_t = c_0 + c_1 t + \ldots + c_k t^k$ genau dann erhält, wenn

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} j^r a_j = 0 \ \ \forall\, r = 1,\ldots,k.$$

b) Geben Sie einen 5-punktigen symmetrischen Filter an, der quadratische Trends erhält.

Aufgabe 1.4 (2+2 Punkte) [Irrfahrt mit Drift, Differenzenmethode]
Sei $\{S_t\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine Irrfahrt mit konstantem Driftparameter μ, d.h.

$$S_0 = 0, \ \ S_t = \mu + S_{t-1} + e_t, \quad t \in \mathbb{N},$$

wobei $\{e_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger ZV mit $E\, e_t = 0$ und $Var\, e_t = \sigma^2\ \forall\, t \in \mathbb{N}$ bezeichne.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert von $\{S_t\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ und die Autokovarianzfunktion.

b) Zeigen Sie, dass $\{DS_t\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ stationär ist.