Prof. Dr. J. Steinebach
Dipl.-Math. M. Kühn WS 2005/06

10. Übungsblatt zur Zeitreihenanalyse

Abgabe: Donnerstag, 19.01.06, 10^{10} Uhr

Aufgabe 10.1 (3 Punkte) [Eigenschaften von ARIMA(p,d,q)-Zeitreihen]
Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine ARIMA(p,d,q)-Zeitreihe, d.h. die X_n erfüllen die folgende Differenzengleichung

$$a(B)(1-B)^d X_n = b(B)e_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2).$$

Seien weiter $A_0, \ldots, A_{d-1}$ beliebige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass die Zeitreihe $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, gegeben durch

$$Y_n = X_n + A_0 + A_1 n + \ldots + A_{d-1}n^{d-1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

die Differenzengleichung ebenfalls erfüllt.

Aufgabe 10.2 (5 Punkte) [Vorhersage von ARIMA(p,d,q)-Zeitreihen]
Sei $\{X_n\}_{n\geq -1}$ die ARIMA(1,2,1)-Zeitreihe gegeben durch

$$(1-aB)(1-B)^2 X_n = (1+bB)e_n \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots$$

und quadratintegrierbare Zufallsvariablen X_0, X_{-1}, die mit der ARMA(1,1)-Zeitreihe

$$Y_n = (1-B)^2 X_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

nicht korreliert seien. Geben Sie die Vorhersagen $P_{M_n} X_{n+h}$ für $h \geq 1$ an.

Aufgabe 10.3 (mündlich) [Fourier-Transformierte]
Seien $X_1, \ldots, X_n$ komplexe Zufallsvariablen. Die Abbildung $J : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch

$$J(\lambda) = n^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} X_k e^{-ik\lambda}$$

(J wird auch als Fourier-Transformierte von $\{X_1, \ldots, X_n\}$ bezeichnet). Zeigen Sie, dass

$$X_t = \frac{1}{2\pi} n^{1/2} \int_{-\pi}^{\pi} J(\lambda) e^{it\lambda} d\lambda$$

für alle $t = 1, \ldots, n$ gilt und geben Sie eine Darstellung der Werte $I(\omega_j)$, $\omega_j \in]-\pi, \pi]$, mit Hilfe von J an.

Aufgabe 10.4 (4 Punkte) [Periodogramm]
Für ein festes $\nu \in]-\pi, \pi]$ seien $X_1, \ldots, X_n$ gegeben durch

$$X_k = e^{i\nu k}, \; k = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte (vgl. Aufg. 10.3) der X_k die Darstellung

$$J(\lambda) = n^{-1/2} \frac{\sin(n(\lambda-\nu)/2)}{\sin((\lambda-\nu)/2)} \exp(-i(\lambda-\nu)(n+1)/2), \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

besitzt und benutzen Sie dieses Ergebnis, um das Periodogramm I_8 für $\nu = \pi/4$ zu berechnen.