Prof. Dr. J. Steinebach
Dipl.-Math. M. Kühn WS 2005/06

11. Übungsblatt zur Zeitreihenanalyse

Abgabe: Donnerstag, 26.01.06, 10^{10} Uhr

Aufgabe 11.1 (mündlich+2+2 Punkte) [Moving-Average-Schätzer]
Gegeben sei die AR(1)-Zeitreihe

$$X_n - \frac{1}{2}X_{n-1} = e_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{iid}(0, \sigma^2),$$

mit Spektraldichte f. Weiter sei folgender Schätzer für f gegeben:

$$\hat{f}(\omega_j) = \frac{1}{10\pi} \sum_{k=-2}^{2} I_{200}(\omega_j + \omega_k), \quad \omega_j = \frac{2\pi j}{200}, \quad \omega_j \in [-\pi, \pi].$$

Bestimmen Sie näherungsweise die Werte für:

a) den Erwartungswert und die Varianz von $I_{200}(\pi/4)$,

b) den Erwartungswert und die Varianz von $\hat{f}(\pi/4)$,

c) eine obere (nichttriviale) Grenze von $P(\hat{f}(\pi/4) \geq \sigma^2)$.

Aufgabe 11.2 (2+2 Punkte) [Daniell-Schätzer]
Gegeben sei der indirekte Spektralschätzer

$$\hat{f}_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|h|\leq r} w(h/r)\hat{\gamma}(h)e^{-ih\lambda}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi,$$

durch das Spektralfenster

$$W(\lambda) = \frac{r}{2\pi} I_{[-\frac{\pi}{r}, \frac{\pi}{r}]}(\lambda) \quad \text{(Daniell-Fenster)}.$$

a) Bestimmen Sie das Lag-Fenster des Daniell-Schätzers.

b) Bestimmen Sie einen direkten Spektralschätzer, durch den der Daniell-Schätzer approximiert werden kann.

Aufgabe 11.3 (2+2 Punkte) [χ^2-Approximation, Konfidenzintervalle]
Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine lineare Zeitreihe, die die Voraussetzungen von Satz 11.5 erfüllt. Die Spektraldichte f werde mit dem Spektraldichteschätzer $\hat{f}$ aus (12.1) geschätzt.

a) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen

$$\frac{I_n(\omega_j + \omega_k)}{\pi f(\omega_j + \omega_k)}, \quad -j < k < \frac{n}{2} - j, \quad 0 < \omega_j < \pi,$$

asymptotisch unabhängig und $\chi^2(2)$-verteilt sind.

b) Die Gewichte $W_n(k)$ des Schätzers seien nun wie in Bsp. 12.1 gewählt, wobei $K = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ und $n = 49$. Geben Sie in Abhängigkeit von $\hat{f}(\omega_j)$ ein asymptotisches Konfidenzintervall für $f(\omega_j)$, $0 < \omega_j < \pi$, zum Niveau $1 - \alpha = 0,95$ an.