Prof. Dr. J. Steinebach
Dipl.-Math. M. Kühn WS 2005/06

12. Übungsblatt zur Zeitreihenanalyse

Abgabe: Donnerstag, 02.02.06, 10^{10} Uhr

Aufgabe 12.1 (mündlich, 2+2 Punkte) [bedingte Varianz]
Seien X, Y reelle Zufallsvariablen mit existierendem bedingten Erwartungswert $E(Y|X)$. Die bedingte Varianz von Y unter X ist definiert als:

$$\mathrm{Var}(Y|X) := E((Y - E(Y|X))^2|X).$$

Interpretieren Sie die bedingte Varianz am Beispiel einer 2-dimensionalen Verteilung mit positiver stetiger Dichte (mündliche Aufgabe) und zeigen Sie:

a) $\mathrm{Var}(Y|X) = E(Y^2|X) - E(Y|X)^2$,

b) $\mathrm{Var}(Y) = E(\mathrm{Var}(Y|X)) + \mathrm{Var}(E(Y|X))$.

Bemerkung: Analog gilt:

a) $\mathrm{Cov}(Z, Y|X) := E((Z - E(Z|X)(Y - E(Y|X))|X) = E(ZY|X) - E(Z|X)E(Y|X)$,

b) $\mathrm{Cov}(ZY) = E(\mathrm{Cov}(Z, Y|X)) + \mathrm{Cov}(E(Z|X), E(Y|X))$.

Aufgabe 12.2 (1+2+4+1 Punkte) [AR(1)-Zeitreihen mit ARCH(1)-Fehlern]
Sei $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (schwach) stationäre Lösung der Differenzengleichung

$$Y_n = \mu + \phi Y_{n-1} + \varepsilon_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad |\phi| < 1,$$

wobei $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine schwach stationäre ARCH(1)-Zeitreihe ist (mit Parametern ω und α, vgl. Kapitel 14). Seien weiter $\mathcal{F}_n := \sigma\{Y_n, Y_{n-1}, \ldots\}$ und $\widetilde{\mathcal{F}}_n := \sigma\{\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \ldots\}$. Zeigen Sie:

a) $E(\varepsilon_n|\widetilde{\mathcal{F}}_{n-h}) = 0$ und $\mathrm{Var}(\varepsilon_n|\widetilde{\mathcal{F}}_{n-h}) = \omega\frac{1-\alpha^h}{1-\alpha} + \alpha^h\varepsilon_{n-h}^2,\ \forall\ n \in \mathbb{Z},\ h > 0$,

b) $E(Y_n|\mathcal{F}_{n-h}) = E(Y_n) + \boldsymbol{o}_P(1)$ für $h \longrightarrow \infty$,

c) $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+k}|\mathcal{F}_{n-h}) = \mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+k}) + \boldsymbol{o}_P(1)$ für $h \longrightarrow \infty,\ k \in \mathbb{Z}$.

d) Vergleichen Sie $\mathrm{Var}(\varepsilon_n|\widetilde{\mathcal{F}}_{n-1})$ und $\mathrm{Var}(Y_n|\mathcal{F}_{n-1})$.