Prof. Dr. J. Steinebach | WS 2005/06
Dipl.-Math. M. Kühn

2. Übungsblatt zur Zeitreihenanalyse

Abgabe: Donnerstag, 3.11.05, 10^{10} Uhr

Aufgabe 2.1 (mündlich) [Autokovarianzfunktion]
Die absolut summierbare Funktion $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$\gamma(h) = \begin{cases} 1 & , \ h = 0; \\ -c\ \theta^{|h|} & , \ \text{sonst}. \end{cases}$$

Geben Sie hinreichende Bedingungen für c, $\theta \in \mathbb{R}$ an, s.d. γ Autokovarianzfunktion eines stationären Prozesses ist.

Aufgabe 2.2 (4 Punkte) [Existenzsatz von Daniell-Kolmogorov]
Sei $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ ein Poisson-Prozess, d.h. der Prozess erfüllt die folgenden Bedingungen:

1) $N_0 = 0$.
2) Für $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ und $n \in \mathbb{N}$ sind
$$N_{t_1} - N_{t_0},\ N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots,\ N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$$
unabhängig.
3) Für $t \geq s$ ist $N_t - N_s$ Poisson-verteilt mit Erwartungswert $\lambda(t-s)$ $\lambda > 0$.

Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Daniell-Kolmogorov, dass ein solcher Prozess existiert.
Hinweis: Der Satz wird in den Übungen wiederholt. Siehe auch: Brockwell/Davis *Time Series*.

Aufgabe 2.3 (3+1 Punkte) [Zyklische Zeitreihen]
Sei $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ der Prozess aus Beispiel 4.2 der Vorlesung.
Zeigen Sie:

a) Geben Sie hinreichende Bedingungen an, s.d. der Prozess reellwertig ist.
b) Welche Darstellung besitzt der Prozess dann?

Aufgabe 2.4 (2+2 Punkte) [Herglotz-Lemma]
Sei $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\gamma(h) = \begin{cases} a & , \ h = 0; \\ h^{-1} \sin(ah) & , \ h = \pm 1, \pm 2, \ldots, \end{cases}$$

wobei $0 < a < \pi$.

a) Zeigen Sie, dass γ positiv semidefinit ist.
b) Geben Sie die zugehörige Spektraldichte an.