

3. Übungsblatt zur Zeitreihenanalyse

Abgabe: Donnerstag, 10.11.05, 10¹⁰ Uhr

Aufgabe 3.1 (mündlich) [Umkehrformel]

Berechnen Sie die Autokovarianzfunktion eines Prozesses, dessen Spektraldichte f gegeben ist durch

$$f(\lambda) = \frac{\pi - |\lambda|}{\pi^2}, \quad \lambda \in]-\pi, \pi].$$

Aufgabe 3.2 (2+2 Punkte) [Spektralfunktion]

Seien $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ und $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ unkorrelierte stationäre Prozesse mit Spektralfunktionen F_X und F_Y . Zeigen Sie:

- a) $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ mit $Z_t := X_t + Y_t$ ist ebenfalls stationär.
- b) Geben Sie die Spektralfunktion von $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ an.

Aufgabe 3.3 (1+2+3+2 Punkte) [Charakterisierung der Autokovarianzfunktion]

Gegeben sei $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

- i) γ ist Autokovarianzfunktion eines Prozesses.
- ii) γ ist positiv semidefinit.
- iii) Es existiert ein endliches, auf $]-\pi, \pi]$ konzentriertes Maß μ , s.d.

$$\gamma(h) = \int_{]-\pi, \pi]} e^{ih\lambda} \mu(d\lambda) \quad \forall h \in \mathbb{Z}.$$

Hinweis: Um $ii) \Rightarrow i)$ zu zeigen muss, ähnlich wie in der Vorlesung (vgl. Bem. 4.1 b)), die Existenz eines Prozesses gezeigt werden. Gehen Sie wie folgt vor:

- 1) Zeigen Sie, dass γ hermitesch ist.
- 2) Mit $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ seien $\Gamma_r(t_1, \dots, t_n)$, $r = 1, 2$ wie folgt definiert

$$\Gamma_r(t_1, \dots, t_n) = (\gamma_r(t_i - t_j))_{i,j=1, \dots, n}, \quad r = 1, 2.$$

Bilden Sie aus $\Gamma_r(t_1, \dots, t_n)$, $r = 1, 2$ eine $(2n \times 2n)$ -Matrix, s.d. eine zugehörige mehrdimensionale Normalverteilung $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$ existiert.

- 3) Zeigen Sie mit Hilfe des Existenzsatzes von Kolmogorov, dass der Prozess

$$U_t = \begin{cases} X_t & \text{für } t \text{ ungerade,} \\ Y_t & \text{für } t \text{ gerade} \end{cases}$$

$t = 1, 2, 3, \dots$ existiert.

- 4) Zeigen Sie, dass der Prozess $\{Z_t = X_t - iY_t; t \in \mathbb{Z}\}$ γ als Autokovarianzfunktion besitzt.
- 5) Besuchen Sie das Tutorium.