Prof. Dr. J. Steinebach
Dipl.-Math. M. Kühn WS 2005/06

4. Übungsblatt zur Zeitreihenanalyse

Abgabe: Donnerstag, 17.11.05, 10^{10} Uhr

Aufgabe 4.1 (mündlich) [Kausalität]
Sei $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ eine AR(2)-Zeitreihe mit Koeffizienten a_1 und a_2. Zeigen Sie, dass $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ kausal ist, falls die Bedingungen

$$a_2 + a_1 < 1, \qquad a_2 - a_1 < 1, \qquad |a_2| < 1$$

erfüllt sind.

Aufgabe 4.2 (4 Punkte) [Differenzengleichungen]
Sei $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ eine ARMA(p,q)-Zeitreihe, gegeben durch

$$a(B)X_t = b(B)e_t, \qquad \{e_t\}_{t\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2),$$

wobei die Polynome a und b keine gemeinsame Nullstelle besitzen und $a(z) \neq 0$ für $|z| \leq 1$. Sei weiter p ein Polynom mit $p(z) \neq 0$ für $|z| \leq 1$. Zeigen Sie, dass die Differenzengleichungen

$$p(B)a(B)Y_t = p(B)b(B)e_t$$

die eindeutige stationäre Lösung $\{Y_t\} = \{X_t\}$ besitzen.

Aufgabe 4.3 (4 Punkte) [Invertierbarkeit]
Sei $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ eine invertierbare ARMA(p,q)-Zeitreihe, d.h. (mit den Bezeichnungen aus Def. 5.1. und Def. 5.3.) es gilt

$$e_t = \sum_{j=0}^{\infty} d_j X_{t-j}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $\{d_j\}_{j=0,1,\ldots}$ gegeben ist durch

$$d_j + \sum_{k=1}^{\min(q,j)} b_k d_{j-k} = -a_j, \qquad j = 0,1,\ldots,$$

wobei $a_0 = -1$, $a_j = 0$ für $j > p$ und $b_k = 0$ für $k > q$.

Aufgabe 4.4 (4 Punkte) [Autokovarianzfunktion]
Sei $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ eine kausale ARMA(p,q)-Zeitreihe mit Autokovarianzfunktion γ. Zeigen Sie, dass Konstanten $C > 0$ und $\delta \in]0,1[$ existieren, s.d.

$$|\gamma(h)| \leq C\delta^{|h|}, \qquad \forall\ h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

und somit $\sum_{h\in\mathbb{Z}} |\gamma(h)| < \infty$.