

### 5. Übungsblatt zur Zeitreihenanalyse

Abgabe: Donnerstag, 24.11.05, 10<sup>10</sup> Uhr

**Aufgabe 5.1** (mündlich) [orthogonale Zuwächse]

Sei  $\{N(\lambda)\}_{\lambda \in [-\pi, \pi]}$  ein Poisson-Prozess mit Intensitätsparameter  $c$  ( $N(\lambda) = \tilde{N}(\lambda + \pi)I_{[-\pi, \pi]}(\lambda)$ , wobei  $\tilde{N}$  den Prozess aus Aufg. 2.2 bezeichnet). Zeigen Sie, dass  $\{Z(\lambda)\}_{\lambda \in [-\pi, \pi]}$  mit

$$Z(\lambda) = N(\lambda) - E N(\lambda) \quad \text{für} \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi$$

ein Prozess mit orthogonalen Zuwächsen ist und geben Sie die zugehörige maßerzeugende Funktion  $F$  an.

**Aufgabe 5.2** (3 Punkte) [stochastisches Integral]

Sei  $F$  die maßerzeugende Funktion eines Prozesses mit orthogonalen Zuwächsen und seien  $g, h \in \mathcal{L}^2(F)$ . Zeigen Sie:

- $\langle I(g), I(h) \rangle_{\mathcal{L}^2(P)} = \langle g, h \rangle_{\mathcal{L}^2(F)}$ ,
- $E I(g) = 0$ .

**Aufgabe 5.3** (3+1 Punkte) [stochastisches Integral]

Sei  $\{Z(\lambda)\}_{\lambda \in [-\pi, \pi]}$  ein Prozess mit orthogonalen Zuwächsen mit zugehöriger maßerzeugender Funktion  $F$  und sei  $\psi \in \mathcal{L}^2(F)$ . Zeigen Sie:

- Der Prozess

$$W(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} \psi(\nu) dZ(\nu) \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi$$

besitzt orthogonale Zuwächse.

- Die maßerzeugende Funktion von  $\{W(\lambda)\}_{\lambda \in [-\pi, \pi]}$  ist gegeben durch

$$G(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} |\psi(\nu)|^2 dF(\nu).$$

**Aufgabe 5.4** (2+3 Punkte) [Spektraldarstellung]

Sei  $\{Z_j\}_{j \in J}$ ,  $J \subset \mathbb{N}$  eine Folge unkorrelierter, zentrierter Zufallsvariablen mit  $\sum_{j \in J} E |Z_j|^2 < \infty$ . Sei weiter der Prozess  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  gegeben durch

$$X_t = \sum_{j \in J} e^{it\lambda_j} Z_j \quad t \in \mathbb{Z},$$

wobei  $\lambda_j \in [-\pi, \pi]$  für  $j \in J$ . Zeigen Sie:

- $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  ist stationär und zentriert.
- Bestimmen Sie den zu  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  gehörigen Prozess mit orthogonalen Zuwächsen in der Spektraldarstellung.