Prof. Dr. J. Steinebach
Dipl.-Math. M. Kühn

WS 2005/06

7. Übungsblatt zur Zeitreihenanalyse

Abgabe: Donnerstag, 08.12.05, 10^{10} Uhr

Aufgabe 7.1 (mündlich) [Vorhersage im Frequenzbereich]
Beweisen Sie Aussage (7.14) der Vorlesung.

Aufgabe 7.2 (5 Punkte) [Vorhersage von ARMA(p,q)-Zeitreihen im Frequenzbereich]
Sei $\{X_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ eine kausale und invertierbare ARMA(p,q)-Zeitreihe gegeben durch die Gleichungen

$$a(B)X_j = b(B)e_j, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Sei weiter $f(\lambda) = g(\lambda)\overline{g(\lambda)}$ die Spektraldichte von $\{X_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, wobei

$$g(\lambda) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-ik\lambda}$$

und $c(z) = \sum_k c_k z^k = b(z)/a(z)$ für $|z| \leq 1$.
Bestimmen Sie $\hat{X}_{n+h}$ durch Vorhersage im Frequenzbereich.

Aufgabe 7.3 (3 Punkte) [deterministische Zeitreihen]
Sei σ^2 der 1-Schritt-Vorhersagefehler einer stationären zentrierten Zeitreihe $\{X_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$.
Zeigen Sie:

$$\sigma^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X_j \in \mathcal{M}_{-\infty} \;\; \forall j \in \mathbb{Z}.$$

(vgl. Bem. 7.4 der Vorlesung)

Aufgabe 7.4 (2+2 Punkte) [Wold-Zerlegung]
Sei $\{X_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ eine MA(1)-Zeitreihe. Definiere

$$Y_j = A\cos(\omega j) + B\sin(\omega j) + X_j, \qquad j \in \mathbb{Z},$$

wobei A und B unkorrelierte zentrierte Zufallsvariablen mit der gleichen Varianz bezeichnen, die unabhängig von $\{X_j\}$ seien.

a) Beweisen Sie, dass $\{Y_j\}$ nicht deterministisch ist.

b) Bestimmen Sie die Wold-Zerlegung von $\{Y_j\}$.