8. Übungsblatt zur Zeitreihenanalyse

Abgabe: Donnerstag, 15.12.05, 10¹⁰ Uhr

Aufgabe 8.1 (mündlich) [Mittelwert-Ergodizität]

Geben Sie eine Zeitreihe $\{X_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ an, die nicht Mittelwert-ergodisch ist und weisen Sie dies mit Hilfe des Spektralmaßes μ_X nach.

Aufgabe 8.2 (3 Punkte) [Asymptotik des Mittelwertschätzers bei AR(1) Zeitreihen]

Sei $\{X_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ eine kausale AR(1)-Zeitreihe mit Erwartungswert m . Beweisen Sie, dass

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

asymptotisch normalverteilt ist.

Aufgabe 8.3 (5 Punkte) [Schätzer für die Autokovarianzfunktion]

Sei $\{X_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ eine stationäre Zeitreihe mit Autokovarianzfunktion γ . Sei weiter

$$\hat{\gamma}(k) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-|k|} (X_j - \bar{X}_n)(X_{j+|k|} - \bar{X}_n) & : |k| < n, \\ 0 & : |k| \geq n \end{cases}$$

wobei $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$. Zeigen Sie, dass $\hat{\gamma}_n$ die Autokovarianzfunktion einer MA(n-1)-Zeitreihe ist.

Aufgabe 8.4 (4 Punkte) [Kovarianzmatrix des Autokorrelationsschätzers]

Berechnen Sie die asymptotische Kovarianzmatrix für $\hat{\rho}(1), \dots, \hat{\rho}(h)$ einer MA(1)-Zeitreihe. Geben Sie hinreichende Bedingungen für $j, k \in \{1, 2, \dots\}$ an, s.d. $\hat{\rho}(j)$ und $\hat{\rho}(k)$ asymptotisch unabhängig sind.