Prof. Dr. J. Steinebach
Dipl.-Math. M. Kühn WS 2005/06

## 8. Übungsblatt zur Zeitreihenanalyse

Abgabe: Donnerstag, 15.12.05, $10^{10}$ Uhr

**Aufgabe 8.1** (mündlich) [Mittelwert-Ergodizität]
Geben Sie eine Zeitreihe $\{X_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ an, die nicht Mittelwert-ergodisch ist und weisen Sie dies mit Hilfe des Spektralmaßes $\mu_X$ nach.

**Aufgabe 8.2** (3 Punkte) [Asymptotik des Mittelwertschätzers bei AR(1) Zeitreihen]
Sei $\{X_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ eine kausale AR(1)-Zeitreihe mit Erwartungswert $m$. Beweisen Sie, dass

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

asymptotisch normalverteilt ist.

**Aufgabe 8.3** (5 Punkte) [Schätzer für die Autokovarianzfunktion]
Sei $\{X_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ eine stationäre Zeitreihe mit Autokovarianzfunktion $\gamma$. Sei weiter

$$\hat{\gamma}(k) = \begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-|k|}(X_j - \bar{X}_n)(X_{j+|k|} - \bar{X}_n) & : |k| < n, \\ 0 & : |k| \geq n \end{cases}$$

wobei $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$. Zeigen Sie, dass $\hat{\gamma}_n$ die Autokovarianzfunktion einer MA(n-1)-Zeitreihe ist.

**Aufgabe 8.4** (4 Punkte) [Kovarianzmatrix des Autokorrelationsschätzers]
Berechnen Sie die asymptotische Kovarianzmatrix für $\hat{\rho}(1), \ldots, \hat{\rho}(h)$ einer MA(1)-Zeitreihe. Geben Sie hinreichende Bedingungen für $j,\ k \in \{1, 2, \ldots\}$ an, s.d. $\hat{\rho}(j)$ und $\hat{\rho}(k)$ asymptotisch unabhängig sind.