Prof. Dr. J. Steinebach WS 2005/06
Dipl.-Math. M. Kühn

9. Übungsblatt zur Zeitreihenanalyse

Abgabe: Donnerstag, 22.12.05, 10^{10} Uhr

Aufgabe 9.1 (mündlich) [Darstellung von MA(q)-Zeitreihen]
Mit den Bezeichnungen aus Satz 9.3 der Vorlesung gelte: Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine MA(q)-Zeitreihe mit

$$b(z) = z^2 - \frac{13}{6}z + 1.$$

Geben Sie eine invertierbare Darstellung von X_n bzgl. eines geeigneten weißen Rauschens $\{\tilde{e}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ an.

Aufgabe 9.2 (2+2 Punkte) [Yule-Walker-Schätzer, Konfidenzintervalle]
Aus den Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$ der Anzahl von Sonnenflecken in den Jahren 1770-1869 ergeben sich folgende Schätzungen für die Werte der Autokovarianzfunktion:

$$\hat{\gamma}(0) = 1382,2 \ , \quad \hat{\gamma}(1) = 1114,4 \ , \quad \hat{\gamma}(2) = 591,72 \ , \quad \hat{\gamma}(3) = 96,215 \ .$$

a) Geben Sie die Yule-Walker-Schätzungen für a_1, a_2 und σ^2 im Modell

$$Y_n = a_1 Y_{n-1} + a_2 Y_{n-2} + e_n, \qquad n \in \mathbb{Z}, \qquad \{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \sim WN(0, \sigma^2),$$

für die Mittelwert-korrigierte Zeitreihe $Y_n = X_n - 46,93$ an.

b) Geben Sie asymptotische Konfidenzintervalle zum Niveau $1 - \alpha = 0,95$ für a_1 und a_2 an.

Aufgabe 9.3 (4 Punkte) [KQ-Schätzer und ML-Schätzer]
Beweisen Sie Bemerkung 9.4 der Vorlesung.

Aufgabe 9.4 (2+2 Punkte) [ML-Schätzer] Gegeben seien zwei Realisationen x_1 und x_2 einer kausalen AR(1)-Zeitreihe

$$X_n - a_1 X_{n-1} = e_n, \qquad \{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \text{ iid}, \ e_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

mit $|x_1| \neq |x_2|$. Finden Sie die Maximum-Likelihood-Schätzer für a_1 und σ^2.