10. Übungsblatt zur VL „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: 21.12.2009, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 37 (mündlich) [Stochastische Konvergenz, empirische Verteilungsfunktion]

Seien $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ unabhängige, identisch verteilte, reelle Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Verteilungsfunktion F. Für $n \in \mathbb{N}$ und festes $x \in \mathbb{R}$ definieren wir:

$$\hat{F}_n(x): \ \Omega \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad \omega \longmapsto \hat{F}_n(x)(\omega) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_{\{X_k \le x\}}(\omega).$$

Zeigen Sie, dass gilt: $\hat{F}_n(x) \xrightarrow{P} F(x) \ \ (n \to \infty)$.

Aufgabe 38 (2+2 Punkte) [Rechenregeln für Konvergenzbegriffe]

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, X$ bzw. $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}, Y$ reelle Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $a \in \mathbb{R}$ konstant. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

$$\left.\begin{array}{c} X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \quad (n \to \infty) \\ \text{und} \\ Y_n \xrightarrow{P} a \quad (n \to \infty) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{llll} a) & X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X + a & (n \to \infty), & \\ b) & X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} aX & (n \to \infty) & (a > 0). \end{array}\right.$$

Aufgabe 39 (3+3 Punkte) [Wartezeitverteilung]

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch $B(1,p)$-verteilter Zufallsvariablen, $p \in (0,1)$. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir den Zeitpunkt des k-ten Erfolgs durch

$$T_k := \inf\{n > T_{k-1} : X_n = 1\}, \quad T_0 := 0.$$

Die Wartezeit zwischen dem $(k-1)$-ten und k-ten Erfolg ist dann $L_k := T_k - T_{k-1}$.

a) Zeigen Sie, dass $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge identisch geometrisch verteilter Zufallsvariablen ist.
Hinweis: Betrachten Sie für festes $k \ge 2$ das Ereignis $\{L_k = \ell, T_{k-1} = m\}$ $(\ell, m \in \mathbb{N})$.

b) Zeigen Sie, dass $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise unabhängiger Zufallsvariablen ist und untersuchen Sie das stochastische Konvergenzverhalten von $\overline{L}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} L_k$.

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 40 (1+1+2 Punkte) [Stochastische Konvergenz, Konsistenz empirischer Schätzer]

a) $X_1, X_2, \ldots$ seien reelle i.i.d. Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Betrachten Sie das „arithmetische Mittel“ $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ sowie die „empirische Varianz“ $S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$ und zeigen Sie:

(i) Falls $a := EX_1$ existiert, so gilt: $E\overline{X}_n = a$ und $\overline{X}_n \xrightarrow{P} a \quad (n \to \infty)$.

(ii) Falls $\sigma^2 := Var(X_1)$ existiert, so gilt: $ES_n^2 = \sigma^2$ und $S_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2 \quad (n \to \infty)$.

b) $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$ seien zweidimensionale i.i.d. Zufallsvektoren auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit

$$0 < \sigma^2 := Var(X_1) < \infty, \quad 0 < \tau^2 := Var(Y_1) < \infty.$$

Zeigen Sie, dass für den „empirischen Korrelationskoeffizienten“ R_n (Definition s.u.) folgende Konvergenz gilt:

$$R_n := \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)(Y_i - \overline{Y}_n)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 \sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y}_n)^2}} \xrightarrow{P} \rho := Korr(X_1, Y_1) \quad (n \to \infty).$$

Hinweis: Beachten Sie hierbei Bemerkung 6.3 aus der Vorlesung.