

11. Übungsblatt zur VL „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: 11.01.2010, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 41 (mündlich) [Erwartungstreue von Schätzern]

In einem Warenlager befinden sich 10 000 Glühbirnen. Eine Stichprobe (ohne Zurücklegen) vom Umfang 250 ergibt 16 defekte Glühbirnen. Bestimmen Sie einen erwartungstreuen Schätzer \hat{R} für die Anzahl R defekter Glühbirnen im gesamten Warenlager und geben Sie den Schätzwert in der oben beschriebenen Situation an.

Aufgabe 42 (3 Bonuspunkte) [χ^2 -Verteilung]

Sei X ein k -dimensionaler, $N(0, \Sigma)$ -verteilter Zufallsvektor. Zeigen Sie, dass $\|X\|^2 = X^T X$ wie $\sum_{i=1}^k \lambda_i Z_i^2$ verteilt ist, wobei Z_1, \dots, Z_k unabhängige, identisch $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariablen und $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die Eigenwerte der symmetrischen, positiv-definiten Matrix Σ sind.

Aufgabe 43 (4 Bonuspunkte) [t -Verteilung]

Für welche $n \in \mathbb{N}$ existieren Erwartungswert und Varianz einer t -Verteilung mit n Freiheitsgraden? Bestimmen Sie in diesen Fällen den Erwartungswert und die Varianz.

Hinweis: Beachten Sie die Normierung der Dichten von t -Verteilungen.

Aufgabe 44 (5 Bonuspunkte) [Effizienz von Schätzern]

Für $n \in \mathbb{N}$ seien X_1, \dots, X_n unabhängige, identisch $D(1/\beta)$ -verteilte Zufallsvariablen, $\beta > 0$, d.h. (vgl. Beispiel 4.6), X_1 besitzt die Dichte

$$f_{1,\beta}(x_1) = \frac{1}{2\beta} e^{-|x_1|/\beta}, \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $\hat{\beta} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|$ ein effizienter Schätzer für β ist.

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★

Wir wünschen allen Teilnehmern ein schönes Weihnachtsfest
und alles Gute für das Jahr 2010.

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★