

**11. Übungsblatt zur VL „Einführung in die Stochastik“**

Abgabe: 11.01.2010, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

**Aufgabe 41** (mündlich) [Erwartungstreue von Schätzern]

In einem Warenlager befinden sich 10 000 Glühbirnen. Eine Stichprobe (ohne Zurücklegen) vom Umfang 250 ergibt 16 defekte Glühbirnen. Bestimmen Sie einen erwartungstreuen Schätzer  $\hat{R}$  für die Anzahl  $R$  defekter Glühbirnen im gesamten Warenlager und geben Sie den Schätzwert in der oben beschriebenen Situation an.

**Aufgabe 42** (3 Bonuspunkte) [ $\chi^2$ -Verteilung]

Sei  $X$  ein  $k$ -dimensionaler,  $N(0, \Sigma)$ -verteilter Zufallsvektor. Zeigen Sie, dass  $\|X\|^2 = X^T X$  wie  $\sum_{i=1}^k \lambda_i Z_i^2$  verteilt ist, wobei  $Z_1, \dots, Z_k$  unabhängige, identisch  $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariablen und  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die Eigenwerte der symmetrischen, positiv-definiten Matrix  $\Sigma$  sind.

**Aufgabe 43** (4 Bonuspunkte) [ $t$ -Verteilung]

Für welche  $n \in \mathbb{N}$  existieren Erwartungswert und Varianz einer  $t$ -Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden? Bestimmen Sie in diesen Fällen den Erwartungswert und die Varianz.

**Hinweis:** Beachten Sie die Normierung der Dichten von  $t$ -Verteilungen.

**Aufgabe 44** (5 Bonuspunkte) [Effizienz von Schätzern]

Für  $n \in \mathbb{N}$  seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige, identisch  $D(1/\beta)$ -verteilte Zufallsvariablen,  $\beta > 0$ , d.h. (vgl. Beispiel 4.6),  $X_1$  besitzt die Dichte

$$f_{1,\beta}(x_1) = \frac{1}{2\beta} e^{-|x_1|/\beta}, \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass  $\hat{\beta} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|$  ein effizienter Schätzer für  $\beta$  ist.

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★

Wir wünschen allen Teilnehmern ein schönes Weihnachtsfest  
und alles Gute für das Jahr 2010.

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★