

**12. Übungsblatt zur VL „Einführung in die Stochastik“**

Abgabe: 18.01.2010, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

**Aufgabe 45** (mündlich) [Erwartungstreue von Schätzern]

Sei  $X$  die Anzahl der Unfälle in einer bestimmten Stadt in einer Woche. Wir betrachten  $X$  als  $\pi_\lambda$ -verteilt,  $\lambda > 0$ . Wir wollen aus der Beobachtung von  $X$  die Wahrscheinlichkeit schätzen, dass in den folgenden drei Wochen kein Unfall geschieht, d.h.  $\gamma(\lambda) = \{P_\lambda(X = 0)\}^3$ . Zeigen Sie, dass jeder erwartungstreue Schätzer  $d$  keinen sinnvollen Schätzwert für  $\gamma(\lambda)$  liefert.

**Aufgabe 46** (3 Punkte) [Maximum-Likelihood-Schätzer]

Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig und identisch verteilt mit Dichte

$$f_\vartheta(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < \vartheta, \\ e^{-(x-\vartheta)}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und  $\vartheta \in \mathbb{R}$  unbekannt. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für  $\vartheta$ .

**Aufgabe 47** (5 Punkte) [Maximum-Likelihood-Schätzer]

Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige, identisch  $\pi_\lambda$ -verteilte Zufallsvariablen,  $\lambda > 0$ . Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer  $\hat{\lambda}$  für  $\lambda$ . Ist  $\hat{\lambda}$  erwartungstreu und effizient für  $\lambda$ ?

**Aufgabe 48** (4 Punkte) [Test]

Sei  $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathcal{P}_{\vartheta, X})$ ,  $\vartheta \in \Theta$ , ein Stichprobenraum. Weiter sei  $\varphi(x) = I_S(x)$ ,  $S \in \mathcal{B}$ , ein Test zum Niveau  $\alpha$  für

$$H : \vartheta \in \Theta_0, \quad K : \vartheta \in \Theta \setminus \Theta_0.$$

Untersuchen Sie, ob  $\tilde{\varphi}(x) = I_{\mathcal{X} \setminus S}(x)$  ein Test zum Niveau  $\alpha$  bzw.  $1 - \alpha$  für

$$\tilde{H} : \vartheta \in \Theta \setminus \Theta_0, \quad \tilde{K} : \vartheta \in \Theta_0.$$

ist. Wie lautet die Antwort, falls zusätzlich gilt:  $E_\vartheta \varphi(X) \geq \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta \setminus \Theta_0$ .