13. Übungsblatt zur VL „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: 25.01.2010, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 49 (mündlich) [Signifikanzbereich]

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilte Zufallsvariablen, $\lambda > 0$. Begründen Sie, weshalb

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sum_{i=1}^n x_i < k, \\ 0, & \text{falls } \sum_{i=1}^n x_i \geq k, \end{cases}$$

ein sinnvoller Test für die Hypothesen $H: \lambda \leq \lambda_0$ und $K: \lambda > \lambda_0$ ist?

Wie bestimmen sie k, so dass der Test ein vorgeschriebenes Niveau α besitzt?

Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 31.

Aufgabe 50 (5 Punkte) [Gauß-Test, t-Test]

Sie erhalten zwei Angebote für eine Investition in einen bestimmten Aktienfonds. Hierauf stellen Sie einige Erkundungen an und erhalten die Information, dass die Renditen von Fonds dieser Art in der Regel normalverteilt sind. Außerdem erhalten Sie folgende Tabelle mit den Renditen dieses Fonds der letzten 16 Jahre (in Prozent):

9.67	14.33	6.82	10.99	15.38	5.08	12.05	14.52
10.76	10.69	11.36	12.52	8.14	12.62	9.11	8.44

a) Angebot A verspricht, dass die erwartete Rendite des Fonds bei über 10% liegt. Sie vertrauen dem Angebot nicht und möchten kein allzu großes Risiko eingehen. Testen Sie also zum Niveau $\alpha = 0.10$ unter der Annahme einer Normalverteilung $N(a, \sigma^2)$ mit $\vartheta = (a, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ = \Theta$ die Hypothesen

$$H: \ a \leq 10, \quad K: \ a > 10.$$

b) Sie kommen zu der Auffassung, dass der Fonds eine erwartete Rendite von exakt 10% besitzt; Angebot B gibt jedoch an, dass diese bei unter 10% liegt. Testen Sie nun unter denselben Voraussetzungen wie in Teil a) die Hypothesen

$$H: \ a = 10, \quad K: \ a \neq 10.$$

c) Sie erhalten zusätzlich noch die Information, dass die Rendite des Fonds eine Standardabweichung von $\sigma = 2$ besitzt. Was ergibt sich in a) und b) in diesem Fall?

Hinweis: Verwenden Sie in den Teilen a) und b) die Statistik aus Satz 9.5 d). Benötigte Verteilungstabellen finden Sie z.B. im Anhang von Georgii (2009).

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 51 (2+2 Punkte) [Signifikanzniveau]

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch π_λ-verteilte Zufallsvariablen, $\lambda > 0$.

a) Bestimmen Sie einen Test zum Niveau α für die Hypothesen

$$H: \ \lambda \leq \lambda_0\,, \quad K: \ \lambda > \lambda_0 \quad (\lambda_0 > 0, \text{ bekannt}).$$

b) Ein Zufallsgenerator liefert die folgenden zehn Realisationen einer π_λ-verteilten Zufallsvariablen:

$$4, \ 2, \ 3, \ 5, \ 3, \ 3, \ 3, \ 3, \ 0, \ 2.$$

Testen Sie die Hypothese $H: \ \lambda \leq 2$ gegen $K: \ \lambda > 2$ bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ bzw. $\alpha = 0.07$.

Hinweis: Für eine π_{20}-verteilte Zufallsvariable X gilt:

k	23	24	25	26	27	28	29	30
$P(X \leq k)$	0.7875	0.8432	0.8878	0.9221	0.9475	0.9657	0.9782	0.9865

Aufgabe 52 (4 Punkte) [Neyman-Pearson-Test]

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $P_\vartheta(N = n) = \vartheta(1-\vartheta)^{n-1}$.

(i) Bestimmen Sie den Neyman-Pearson-Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ für

$$H: \ \vartheta = \frac{1}{2}, \quad K: \ \vartheta = \frac{1}{4}.$$

(ii) Wie entscheiden Sie sich bei beobachtetem $N = 5$?

(iii) Bestimmen Sie die Güte des Tests.