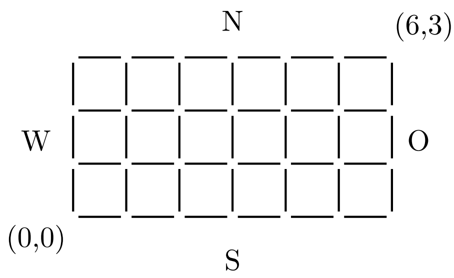
2. Übungsblatt zur VL „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: 26.10.2009, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 5 (mündlich) [Kombinatorik]



Sie stehen in Manhattan an der Kreuzung $(0,0)$ und wollen auf dem kürzesten Weg nach (n,k) gelangen, $n,k \in \mathbb{N}$, d.h., Sie gehen an jedem Knoten im Gitter entweder nach Osten (O) oder nach Norden (N).

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, auf dem kürzesten Weg von $(0,0)$ nach (n,k) zu gelangen?

b) Sei nun $n = k = 12$. Wie viele kürzeste Wege gibt es von $(0,0)$ nach (n,k), wenn Sie auf Ihrem Weg noch einen Freund in $(6,8)$ abholen wollen?

Aufgabe 6 (3 Punkte) [Urnenmodelle]

Es gebe vier Typen von Hausaufgaben, die sich hinsichtlich ihrer Bearbeitungszeit unterscheiden. In einer Woche werden insgesamt 20 Aufgaben gestellt, 4 vom Typ I, 6 vom Typ II, 7 vom Typ III und 3 vom Typ IV. Man wähle an einem Tag 5 dieser 20 Hausaufgaben „zufällig“ zur Bearbeitung aus, d.h., die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte der 20 Aufgaben auszuwählen, sei für alle Aufgaben gleich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 5 ausgewählten Aufgaben

a) mindestens 3 Aufgaben vom Typ II,

b) nur Aufgaben vom Typ II und III,

c) genau 3 Aufgaben vom selben Typ

sind? Geben Sie zunächst einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an.

Aufgabe 7 (4 Punkte) [Urnenmodelle]

Das Ergebnis eines Roulette-Spieles ist eine der Zahlen 1 bis 36 oder die 0, die alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Man kann bei einfacher Gewinnchance auf die geraden Zahlen $2, 4, \ldots, 36$ („Pair“) oder auf die ungeraden Zahlen $1, 3, \ldots, 35$ („Impair“) setzen.
Ein Spieler setze immer auf „Pair“.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er bei 10 Spielen genau 2-mal Erfolg hat?

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p_k dafür, dass der Spieler beim k-ten Spiel ($k \in \mathbb{N}$) zum ersten Erfolg kommt, und berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit für $k = 1, 2, 3$.

[BITTE WENDEN]

c) Das Einsatzlimit betrage 5000 Euro. Der Spieler beginnt mit einem Einsatz von 5 Euro und nimmt sich vor, jeweils bei Verlust seinen Einsatz im nächsten Spiel zu verdoppeln und bei Gewinn aufzuhören. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er wegen Überschreitung des Limits aufhören muss, bevor er einen Gewinn realisieren kann?

Aufgabe 8 (5 Punkte) [Urnenmodelle, Verteilung]

Man verteile zufällig n verschiedene Kugeln auf k Urnen $U_1, \ldots, U_k$. Betrachten Sie den entsprechenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), P_1)$ mit $\Omega_1 = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \,|\, \omega_i \in \{1, \ldots, k\}\}$. Hierbei gilt $\omega_i = j$, falls sich die i-te Kugel in Urne U_j befindet $(j = 1, \ldots, k)$.
Wir definieren die Menge $\Omega' = \left\{ (n_1, \ldots, n_k) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{k} n_i = n \right\}$, wobei $n_i \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Kugeln in Urne U_i bezeichnet $(i = 1, \ldots, k)$. Sei die Abbildung

$$X = (X_1, \ldots, X_k) : \; \Omega_1 \longrightarrow \Omega', \; \omega \longmapsto (X_1(\omega), \ldots, X_k(\omega)),$$

definiert durch $X_j\,(\omega_1, \ldots, \omega_n) = |\,\{\, i \in \{1, \ldots, n\} \;|\, \omega_i = j\}\,|$, für $j = 1, \ldots, k$.

(a) Zeigen Sie: $|\,\{\, X \in \Omega' \,\}\,| = k^n$.

(b) Mit Ω_3 aus der Vorlesung gilt: $|\,\Omega'\,| = |\,\Omega_3\,|$.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe der Formel von Poincaré-Sylvester: $P_1\,(\, X_1 \geq 1, \ldots, X_k \geq 1\,)$.

(d) Berechnen Sie für $r = 0, \ldots, n$ die Wahrscheinlichkeit $P_1\,(\, X_1 = r\,)$.

(e) Sei $k = k(n)$ derart, dass $\frac{n}{k} \to \lambda > 0 \quad (n \to \infty)$. Zeigen Sie, dass dann für jedes feste $r \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P_1\,(\, X_1 = r\,) \;=\; \frac{\lambda^r}{r!}\, e^{-\lambda}.$$