3. Übungsblatt zur VL „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: 02.11.2009, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 9 (mündlich) [Zufallsvariable, Verteilungsfunktion]

Sei X eine reelle Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und F die Verteilungsfunktion von X. Die Menge der Sprungstellen von F werde mit $\mathcal{S}$ bezeichnet. Zeigen Sie:

a) F besitzt höchstens abzählbar viele Sprungstellen.

b) X ist genau dann diskret verteilt, wenn gilt:

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \{F(x) - F(x-)\} = 1.$$

Aufgabe 10 (3+3 Punkte) [Absolut-stetige Verteilungen]

Es bezeichne $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \ x > 0,$ die aus der Analysis bekannte Γ-Funktion und für eine beliebige Menge M und eine Teilmenge $A \subset M$ sei $I_A : M \to \{0, 1\}$ mit

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases} \qquad x \in M,$$

die **Indikatorfunktion** von A.

a) Sei nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert über

$$f_{\alpha,\beta}(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} I_{(0,\infty)}(x), \qquad \alpha, \beta > 0.$$

Zeigen Sie, dass es sich bei $f_{\alpha,\beta}$ um die Dichte einer reellen, absolut-stetig verteilten Zufallsvariablen X handelt (vgl. Beispiel 1.3) und berechnen Sie, falls existent, den Erwartungswert und die Varianz von X.

b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert über

$$g_{\alpha,\beta}(x) := \alpha\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-(\beta x)^\alpha} I_{(0,\infty)}(x), \qquad \alpha, \beta > 0.$$

Zeigen Sie, wie in Teil a), dass es sich bei $g_{\alpha,\beta}$ um die Dichte einer reellen, absolut-stetig verteilten Zufallsvariablen Y handelt und bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von Y. Berechnen Sie ferner, falls existent, den Erwartungswert von Y.

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 11 (5 Punkte) [Verteilungsfunktion]

Sei F die Verteilungsfunktion einer reellen Zufallsvariablen. Betrachten Sie die verallgemeinerte Inverse $F^{-1}(p) := \inf\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, F(x) \geq p\right\}$, $p \in (0,1)$, und zeigen Sie:

a) F^{-1} ist monoton wachsend auf $(0,1)$.

b) Für $p \in (0,1)$ gilt: $F\left(F^{-1}(p)\right) \geq p$.

c) Für $x \in \mathbb{R},\ p \in (0,1)$, gilt: $F(x) \geq p \iff x \geq F^{-1}(p)$.

d) Für $p \in (0,1)$ gilt: $F\left(F^{-1}(p)\right) = p \iff p \in F(\mathbb{R}) \ \left(= \{F(x) | x \in \mathbb{R}\}\right)$.

e) F^{-1} ist linksstetig auf $(0,1)$.

Hinweis: Indirekter Beweis.

Aufgabe 12 (2+2 Punkte) [Momente]

Sei S_n eine $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$-verteilte Zufallsvariable und $T_n = \max\{S_n,\, n - S_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, beliebig.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Stirling'schen Formel $\lim_{n\to\infty} n! \big/ \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} = 1$, dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} E\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| = 0.$$

(b) Beweisen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{T_n}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$