4. Übungsblatt zur VL „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: 09.11.2009, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 13 (mündlich) [bedingte Wahrscheinlichkeiten]

Von den drei Studenten A, B und C, die alle knapp eine Prüfung nicht bestanden haben, wird einer rein zufällig ausgewählt und bekommt den Schein, während die beiden anderen durchfallen. (Das Ergebnis wird ihnen aber erst bei der Scheinvergabe mitgeteilt.) Student C fragt den Assistenten, der das Ergebnis kennt: „Fällt A oder B durch? Einer von beiden bekommt den Schein sicher nicht, und Sie geben mir keine Information über meinen Schein, wenn Sie mir verraten, welcher von beiden es ist.“

Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum für das obige Experiment an, der die Antwort des Assistenten berücksichtigt. Beachten Sie hierbei den Fall, dass sowohl A als auch B durchfällt, und gehen Sie davon aus, dass in diesem Fall der Assistent mit Wahrscheinlichkeit p, $0 \leq p \leq 1$, den Studenten A nennt und er grundsätzlich wahrheitsgemäß antwortet.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass C durchfällt, sowie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass C durchfällt, unter der Bedingung, dass A durchfällt.

b) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass C durchfällt, unter der Bedingung, dass der Assistent angibt, dass A durchfällt.

Gibt der Assistent also durch eine Antwort wirklich keine Information preis?

Aufgabe 14 (2+2 Punkte) [bedingte Wahrscheinlichkeiten]

Im Rahmen der anhaltenden Schweinegrippeepidemie wurde ein Teil der Bevölkerung geimpft. Die Erfahrung zeigt, dass von fünf Kranken nur einer geimpft ist. Man weiß zusätzlich, dass unter zwölf Geimpften nur ein Kranker ist.

a) Gehen Sie zunächst davon aus, dass ein Viertel der Bevölkerung geimpft wurde. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dann ein Nichtgeimpfter krank?

b) Gehen Sie nun davon aus, dass Ihnen der Anteil der Geimpften in der Bevölkerung noch unbekannt ist. Sie beobachten jedoch, dass es im Verlauf der Epidemie auch zu schweinegrippebedingten Todesfällen kommt. Von 20 Erkrankten versterben fünf an den Folgen der Grippe; sie stellen jedoch fest, dass unter diesen Toten lediglich jeder einhundertfünzigste geimpft war. Weiterhin erkennen Sie, dass von 60 Personen 10 an der Grippe erkranken. Von den verbleibenden 50 Gesunden geben 22 an, dass sie den Impfstoff erhielten.

   Schließen Sie aus den Ihnen gegebenen Informationen auf den Anteil der Bevölkerung, der den Impfstoff erhielt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Geimpften an den Folgen der Grippe verstirbt?

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 15 (2+2+2 Punkte) [mehrstufige Zufallsexperimente]

In einer Urne befinden sich R rote und S schwarze Kugeln. Es wird zufällig eine Kugel entnommen und ihre Farbe notiert. Danach legt man diese sowie ℓ zusätzliche Kugeln derselben Farbe in die Urne zurück ($\ell \in \mathbb{N}_0$, fest). Der Vorgang wird nun noch $(n-1)$-mal wiederholt. Als Ergebnismenge werde

$$\Omega = \left\{ \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \,\middle|\, \omega_i \in \{0,1\} \right\}$$

gewählt, wobei $\omega_i = 1$ bedeutet, dass im $i-$ten Zug eine rote Kugel gezogen wurde.

a) Bestimmen Sie ein geeignetes Gesamtmodell $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ für das beschriebene Experiment. Geben Sie hierzu $p_1(\omega_1)$ und $p_{i+1|\omega_1,\ldots,\omega_i}(\omega_{i+1})$ für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ an.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, nacheinander k rote Kugeln und danach $n-k$ schwarze Kugeln zu ziehen, d.h.

$$P\left(X_1 = 1, \ldots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \ldots, X_n = 0\right),$$

wobei $X_i : \Omega \to \{0,1\}$ die $i-$te Projektion bezeichnet, also $X_i(\omega) = \omega_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

c) Bestimmen Sie die Verteilung der Anzahl der gezogenen roten Kugeln, d.h.

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Folgern Sie, dass im Fall $\ell = 0$ die Anzahl der gezogenen roten Kugeln binomialverteilt ist.

Aufgabe 16 (4 Punkte) [Charakterisierung der Exponentialverteilung]

Zeigen Sie, dass eine positive, reelle Zufallsvariable T genau dann exponentialverteilt ist, wenn für alle $s \geq 0$ und $t \geq 0$ gilt:

$$P(T > s + t \,|\, T > s) = P(T > t).$$

Hinweis: Sie dürfen das folgende, aus der Analysis bekannte Resultat verwenden:
Sei $G : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft

$$G(s+t) = G(s)G(t) \quad \text{für alle} \quad s, t \geq 0.$$

Dann gilt entweder $G \equiv 0$ oder $G(s) = \exp(s \ln a)$ für alle $s \geq 0$, wobei $a := G(1) > 0$.

Zeigen Sie, dass $G : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $G(s) := P(T > s)$ stetig ist und dass $0 < G(1) < 1$ gilt, d.h., $G(1) = e^{-\lambda}$ für ein $\lambda > 0$.