5. Übungsblatt zur VL „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: 16.11.2009, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 17 (mündlich) [mehrstufige Zufallsexperimente]

Nach der Insolvenz eines namhaften Versandhandelsunternehmens geht mit Wahrscheinlichkeit q_1 ein Paket in den Wirren des Ausverkaufs verloren und wird folglich nicht dem Paketdienst übergeben. Dieser Paketdienst stellt ein erhaltenes Paket mit Wahrscheinlichkeit q_2 falsch zu. Sie haben Pech und erhalten ein von Ihnen bestelltes Paket nicht.

Bestimmen Sie unter Angabe eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraumes die Wahrscheinlichkeit, dass das Versandhandelsunternehmen für die Nichtzustellung Ihres Pakets verantwortlich ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trägt der Paketdienst die Schuld, dass Sie Ihre Bestellung nicht erhielten?

Aufgabe 18 (1+1+1+1 Punkte) [Unabhängigkeit]

Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sowie drei Ereignisse $A, B, C \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie:

(a) Die Ereignisse A und B sind genau dann unabhängig, wenn A und B^c unabhängig sind.

(b) Aus der jeweils paarweisen Unabhängigkeit von A, B und C folgt im Allgemeinen nicht die Unabhängigkeit von A, B und C.

(c) Aus der Beziehung $P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$ folgt im Allgemeinen nicht die jeweils paarweise Unabhängigkeit von A, B und C.

(d) Falls $0 < P(B) < 1$, so sind die Ereignisse A und B genau dann unabhängig, wenn $P(A|B) = P(A|B^c)$ gilt.

Aufgabe 19 (1+1+2 Punkte) [bedingte Verteilung]

Sei X eine $N(a, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_{a,σ^2}, Dichte f_{a,σ^2} und sei $C := \{X > 0\}$. Berechnen Sie

(a) die bedingte Verteilungsfunktion $F_{X|C}$ von X unter C in Abhängigkeit der Verteilungsfunktion Φ einer $N(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen Z;

(b) die bedingte Dichte $f_{X|C}$ von X unter C;

(c) den bedingten Erwartungswert $E(X|C)$ von X unter C.

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 20 (2+2 Punkte) [bedingter Erwartungswert]

Sei X eine diskret verteilte Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit existierendem Erwartungswert. Zeigen Sie:

a) Ist $(C_i)_{i=1,2,\ldots}$ eine disjunkte Zerlegung von Ω mit $P(C_i) > 0$ für alle $i \geq 1$, so existiert genau eine Zufallsvariable X_0 auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit folgenden Eigenschaften:

   (i) X_0 ist auf allen C_i $(i \geq 1)$ konstant;

   (ii) $E(X_0 I_C) = E(X I_C)$ für alle $C = \sum_{i \in I} C_i$, $I \subset \mathbb{N}$.

   Geben Sie X_0 explizit an.

b) Ist $C \subset \Omega$ mit $P(C) > 0$ und sind X und I_C unabhängig, so gilt:

$$E(X|C) = E(X).$$

Hinweis: Wie in Beispiel 3.6 der Vorlesung, dürfen Sie die dort zitierten Ergebnisse aus der "Wahrscheinlichkeitstheorie" verwenden.