6. Übungsblatt zur VL „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: 23.11.2009, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 21 (mündlich) [Randverteilungen]

Bei einem Zufallsexperiment können die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_k$ (mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $1 \leq i < j \leq k$), $k \in \mathbb{N}$, mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_k$ auftreten ($\sum_{j=1}^k p_j = 1$). Das Experiment werde n-mal unabhängig durchgeführt und es sei X_i die Anzahl derjenigen Experimente, in denen das Ereignis A_i eingetreten ist ($i = 1, \ldots, k$).

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von $(X_1, \ldots, X_k)$.

(b) Bestimmen Sie die Randverteilungen der X_i ($i = 1, \ldots, k$).

Aufgabe 22 (1+1+2 Punkte) [Randdichten, Unabhängigkeit]

Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien absolut-stetig verteilt mit gemeinsamer Dichte

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1+x_1x_2}{4}, & |x_1|, |x_2| \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Randdichten f_1 und f_2.

(b) Sind X_1 und X_2 unabhängig?

(c) Sind X_1^2 und X_2^2 unabhängig?

Aufgabe 23 (2+2 Punkte) [gemeinsame Verteilungsfunktion]

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit derselben Verteilungsfunktion F und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir definieren:

$$M_n = \max_{i=1,\ldots,n} X_i \quad \text{und} \quad m_n = \min_{i=1,\ldots,n} X_i.$$

a) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion von (M_n, m_n).

Hinweis: Betrachten Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(M_n \leq x, m_n > y)$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass M_n und m_n genau dann stochastisch unabhängig sind, wenn ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $F(x) = I_{[a,\infty)}(x)$.

Aufgabe 24 (4 Punkte) [Unabhängigkeit nach Transformation]

Seien X und Y unabhängige und identisch geometrisch verteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $U := \min\{X, Y\}$ und $V := X - Y$ stochastisch unabhängig sind.