7. Übungsblatt zur VL „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: 30.11.2009, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 25 (mündlich) [Varianz, beschränkte Zufallsvariablen]

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit existierendem zweiten Moment.

a) Welche Zahl $\mu \in \mathbb{R}$ minimiert $E(X-\mu)^2$?

b) Zeigen Sie, dass

$$(1) \quad \operatorname{Var}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$$

gilt, falls $P(X \in [a,b]) = 1$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
Dabei tritt Gleichheit genau dann auf, wenn $P(X=a) = P(X=b) = \frac{1}{2}$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie $\operatorname{Var}\big(X - \frac{a+b}{2}\big)$ und zeigen Sie, dass bei Gleichheit in (1) für alle Intervalle $[a_1, b_1]$ mit $a < a_1 < b_1 < b$ gelten muss: $P(X \in [a_1, b_1]) = 0$.

Aufgabe 26 (2+2 Punkte) [Faltung]

Seien X, Y unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0$.

a) Gelte $P_X = \pi_\lambda$. Zeigen Sie, dass für alle $k = 0, \ldots, n$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$P(X = k \mid X+Y = n) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}.$$

b) Für alle $k = 0, \ldots, n$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $P(X+Y=n) > 0$ und

$$P(X = k \mid X+Y = n) = \frac{1}{(n+1)}.$$

Zeigen Sie, dass $0 < p_0 := P(X=0) < 1$ gilt und $P(X=j) = p_0(1-p_0)^j$ für $j \in \mathbb{N}_0$.

Hinweis: Bestimmen Sie $p_k := P(X=k)$, $k = 2, 3, \ldots,$ in Abhängigkeit von p_0 und p_1.

Aufgabe 27 (2+2 Punkte) [Transformationssatz]

Der Zufallsvektor (X_1, X_2) sei absolut-stetig verteilt mit gemeinsamer Dichte f.

a) Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von X_1/X_2 und X_2.

Hinweis: Verwenden Sie, dass die Aussage von Satz 4.4 erhalten bleibt, falls man die Abbildung $h : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ mit Bildbereich $W := h(\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}))$ betrachtet.

b) Seien nun X_1 und X_2 unabhängige und identisch $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen. Berechnen Sie die Dichte von X_1/X_2.

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 28 (2+2 Punkte) [bedingte Dichte, bedingter Erwartungswert]

Seien X_1 und X_2 unabhängige, identisch $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen und

$$X := \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} := BX.$$

a) Bestimmen Sie die Dichte von $Y = \binom{Y_1}{Y_2}$ und die Randdichte von Y_2.

Hinweis: Beachten Sie die Normierungseigenschaft von Normalverteilungsdichten.

b) Zeigen Sie, dass die bedingte Dichte von Y_1 unter $Y_2 = y_2$ wieder eine Normalverteilungsdichte ist und bestimmen Sie die bedingten Erwartungswerte von Y_1 sowie von Y_1^2 unter $Y_2 = y_2$.