8. Übungsblatt zur VL „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: 07.12.2009, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 29 (mündlich) [Korrelationskoeffizient, Unkorreliertheit]

a) X und Y seien unabhängige, reelle Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit existierenden zweiten Momenten und Varianzen $\sigma^2 := Var(X)$, $\tau^2 := Var(Y)$. Berechnen Sie $\mathrm{Korr}(X - Y, X + Y)$.

b) Geben Sie ein Beispiel an für zwei unkorrelierte, aber nicht unabhängige Zufallsvariablen.

Aufgabe 30 (2+2 Punkte) [erzeugende Funktion, Faltung]

Eine Zufallsvariable heißt **negativ binomialverteilt** mit Parametern $r > 0$ und $p \in (0,1)$ (kurz: $NB(r,p)$-verteilt), falls

$$P(X = k) = \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

a) Sei X $NB(r,p)$-verteilt. Bestimmen Sie die erzeugende Funktion von X sowie $E(X)$ und $Var(X)$.

b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, identisch $NB(r,p)$-verteilt. Zeigen Sie, dass $X_1 + \cdots + X_n$ $NB(nr,p)$-verteilt ist.

Hinweis: Für $r \in \mathbb{R}_+$ gilt $(1+x)^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{k} x^k$, $|x| < 1$, wobei man für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definiert:

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad \text{und} \qquad \binom{\alpha}{0} := 1 .$$

Aufgabe 31 (2+2 Punkte) [momenterzeugende Funktion]

Eine Zufallsvariable X sei $\Gamma(\alpha,\beta)$-verteilt, d.h., X sei absolut-stetig verteilt mit Dichte

$$f_{\alpha,\beta}(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} I_{(0,\infty)}(x), \qquad \alpha, \beta > 0 \quad \text{(fest)}.$$

a) Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion $M_X = M_X(t)$ für $|t| < t_0$ mit maximalem $t_0 > 0$ und berechnen Sie alle Momente von X.

b) Seien nun $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch $\Gamma(\alpha,\beta)$-verteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie die Verteilung von $X_1 + \cdots + X_n$.

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 32 (2+2 Punkte) [„gemischte" Momente]

Seien X_1 und X_2 unabhängige, identisch $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen und

$$X := \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} := BX + a, \quad \Sigma := \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} := BB^T,$$

mit $a = \binom{a_1}{a_2} \in \mathbb{R}^2$ und einer regulären 2×2 - Matrix B.

a) Berechnen Sie mit Hilfe der momenterzeugenden Funktion M_Y den Korrelationskoeffizienten von Y_1 und Y_2.

Hinweis: Verwenden Sie, dass aus der Regularität von B auch $\sigma_i^2 > 0$ $(i = 1, 2)$ folgt.

b) Zeigen Sie, dass Y_1 und Y_2 genau dann unabhängig sind, wenn $Cov(Y_1, Y_2) = 0$ gilt.

Hinweis: Für den Nachweis der Unabhängigkeit von Y_1 und Y_2 genügt es zu zeigen, dass sich die gemeinsame Dichte $f_Y = f_Y(y_1, y_2)$ für jeden Punkt $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ als Produkt der Randdichten $f_{Y_1} = f_{Y_1}(y_1)$ und $f_{Y_2} = f_{Y_2}(y_2)$ darstellen lässt.