

**9. Übungsblatt zur VL „Einführung in die Stochastik“**

Abgabe: 14.12.2009, 09.30 - 09.45 Uhr (!), vor dem Hörsaal des MI

**Aufgabe 33** (mündlich) [Grenzverteilungen]

Die 365 Tage eines Kalenderjahres seien als Geburtstage gleich wahrscheinlich. Approximieren Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

- a) unter 800 Personen 2 oder 3 Personen  
 b) unter 8000 Personen mindestens 20 und höchstens 30 Personen  
 am 24. Dezember Geburtstag haben. Lösen Sie Teil a)

- (i) mittels der aus Beispiel 6.1 (bzw. 1.9) bekannten Konvergenz und  
 (ii) mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

Für Teil b) genügt es, Ansatz (ii) zu betrachten.

**Hinweis:** Verwenden Sie für (ii) eine Normalverteilungstabelle, vgl. z.B. Georgii (2007), S. 357.

**Aufgabe 34** (4 Punkte) [Konvergenz nach Verteilung]

Seien  $\{X_i\}_{i=1,2,\dots}$  unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit stetiger Verteilungsfunktion  $F$ , sowie

$$M_n := \max\{X_i \mid i = 1, \dots, n\} \quad \text{und} \quad Z_n := n(1 - F(M_n)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass  $Z_n$  nach Verteilung gegen eine absolut-stetig verteilte Zufallsvariable  $Z$  konvergiert und bestimmen Sie deren Verteilung.

**Hinweis:** Beachten Sie Aufgabe 11.

**Aufgabe 35** (4 Punkte) [Gesetz der großen Zahlen]

Seien  $\{X_i\}_{i=1,2,\dots}$  reelle Zufallsvariablen mit  $E(X_i) = a$ ,  $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ ,  $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$  für  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $|i - j| > m$ , und  $\sigma_i^2 \leq \alpha i^\beta$  für  $i \in \mathbb{N}$ , wobei  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha > 0$ , und  $\beta < 1$  feste Konstanten sind. Zeigen Sie, dass  $\{X_i\}_{i=1,2,\dots}$  dem Gesetz der großen Zahlen genügt, d.h.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - a) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty.$$

**Aufgabe 36** (4 Punkte) [Stetigkeitssatz]

Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $Z_n$  eine  $\pi_{\lambda_n}$ -verteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass  $(Z_n - \lambda_n) / \sqrt{\lambda_n}$  nach Verteilung gegen eine  $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariable  $Z$  konvergiert, falls  $\lambda_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

**Hinweis:** Verwenden Sie die Approximation  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$  ( $x \rightarrow 0$ ).

[BITTE WENDEN]

**Einladung der Fachschaft:** Am 11.12.2009 veranstaltet die Fachschaft wieder eine große Nikolausfeier! Im Seminarraum 2 des Mathematischen Instituts gibt es ab 20.00 Uhr Glühwein, Kölsch, andere Getränke und Musik.

Ihr seid herzlich eingeladen, wir freuen uns auf Euch!