9. Übungsblatt zur VL „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: 14.12.2009, 09.30 - 09.45 Uhr (!), vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 33 (mündlich) [Grenzverteilungen]

Die 365 Tage eines Kalenderjahres seien als Geburtstage gleich wahrscheinlich. Approximieren Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

a) unter 800 Personen 2 oder 3 Personen

b) unter 8000 Personen mindestens 20 und höchstens 30 Personen

am 24. Dezember Geburtstag haben. Lösen Sie Teil a)

(i) mittels der aus Beispiel 6.1 (bzw. 1.9) bekannten Konvergenz und

(ii) mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

Für Teil b) genügt es, Ansatz (ii) zu betrachten.

Hinweis: Verwenden Sie für (ii) eine Normalverteilungstabelle, vgl. z.B. Georgii (2007), S. 357.

Aufgabe 34 (4 Punkte) [Konvergenz nach Verteilung]

Seien $\{X_i\}_{i=1,2,\dots}$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit stetiger Verteilungsfunktion F, sowie

$$M_n := \max\{X_i \,|\, i = 1, \dots, n\} \quad \text{und} \quad Z_n := n\,(1 - F\,(M_n))\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass Z_n nach Verteilung gegen eine absolut-stetig verteilte Zufallsvariable Z konvergiert und bestimmen Sie deren Verteilung.

Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 11.

Aufgabe 35 (4 Punkte) [Gesetz der großen Zahlen]

Seien $\{X_i\}_{i=1,2,\dots}$ reelle Zufallsvariablen mit $E(X_i) = a$, $Var(X_i) = \sigma_i^2$, $Cov(X_i, X_j) = 0$ für $i, j \in \mathbb{N}$, $|i - j| > m$, und $\sigma_i^2 \le \alpha\, i^\beta$ für $i \in \mathbb{N}$, wobei $m \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, und $\beta < 1$ feste Konstanten sind. Zeigen Sie, dass $\{X_i\}_{i=1,2,\dots}$ dem Gesetz der großen Zahlen genügt, d.h.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Aufgabe 36 (4 Punkte) [Stetigkeitssatz]

Für $n \in \mathbb{N}$ sei Z_n eine π_{λ_n}-verteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass $(Z_n - \lambda_n)/\sqrt{\lambda_n}$ nach Verteilung gegen eine $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariable Z konvergiert, falls $\lambda_n \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Hinweis: Verwenden Sie die Approximation $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$ $(x \to 0)$.

[BITTE WENDEN]

Einladung der Fachschaft: Am 11.12.2009 veranstaltet die Fachschaft wieder eine große Nikolausfeier! Im Seminarraum 2 des Mathematischen Instituts gibt es ab 20.00 Uhr Glühwein, Kölsch, andere Getränke und Musik.

Ihr seid herzlich eingeladen, wir freuen uns auf Euch!