1. Übungsblatt zur VL „Zeitreihenanalyse“

Abgabe: Mo, 24.10.2011, 9.45 - 10.00 Uhr, im Seminarraum 2 des MI

Aufgabe 1 (mündlich) [Stationarität]

Sei $\{e_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ eine Folge unabhängiger, identisch $N(0,1)$-verteilter Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass die durch

$$X_t = \begin{cases} e_t, & \text{falls t gerade,} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_t^2 - 1\right), & \text{falls t ungerade,} \end{cases}$$

definierte Zeitreihe $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ zwar (schwach) stationär, aber nicht stark (strikt) stationär ist.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte) [Konvergenz in $\mathcal{L}^2$, Autokovarianzfunktion]

Sei $\{X_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ein standardisierter, stationärer stochastischer Prozess mit Autokovarianzfunktion γ. Weiter seien $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ und $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ relle Zahlenfolgen.

(a) Zeigen Sie, dass $Y_n := \sum_{k=1}^n a_k X_k$ im quadratischen Mittel konvergiert, falls

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_i a_j \gamma(i-j)$$

absolut konvergiert.

(b) Zeigen Sie: Falls $\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ absolut konvergent ist und

$$X_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j e_{n-j} \quad \text{mit} \quad \{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \sim WN(0,\sigma^2),$$

so gilt

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty.$$

Aufgabe 3 (3+1 Punkte) [Trend, Filter]

(a) Zeigen Sie, dass ein linearer Filter $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ polynomiale Trends $m_t = c_0 + c_1 t + \ldots + c_k t^k$ genau dann erhält, wenn gilt:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j\, j^r = 0 \ \ \forall\, r = 1,\ldots,k.$$

(b) Geben Sie einen 5-punktigen, symmetrischen Filter an, der quadratische Trends erhält.

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 4 (2+2 Punkte) [Irrfahrt mit Drift, Differenzenmethode]

Sei $\{S_t\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine Irrfahrt mit konstantem Driftparamater μ, d.h.

$$S_0 = 0,\ S_t = \mu + S_{t-1} + e_t,\ t \in \mathbb{N},$$

wobei $\{e_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}(e_t) = 0$ und $\mathrm{Var}(e_t) = \sigma^2 < \infty$ für alle $t \in \mathbb{N}$ bezeichne.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert von $\{S_t\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ und die Autokovarianzfunktion.

(b) Zeigen Sie, dass $\{DS_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ stationär ist.