Prof. Dr. Josef G. Steinebach Wintersemester 2011/12

10. Übungsblatt zur VL „Zeitreihenanalyse“

Abgabe: Mo, 9.1.2012, 9.45 - 10.00 Uhr, im Seminarraum 2 des MI

Aufgabe 36 (mündlich) [Umkehrformel für Fourier-Transformierte]

Die diskrete Fourier-Transformierte von $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ist gegeben durch

$$J(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} x_k e^{-ik\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Beweisen Sie die Umkehrformel

$$x_t = \frac{1}{2\pi} \sqrt{n} \int_{-\pi}^{\pi} J(\lambda) e^{it\lambda} d\lambda, \quad t = 1, \ldots, n.$$

Aufgabe 37 (4 Punkte) [Eigenschaften der Fourier-Transformierten]

Für eine Folge $\{x_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ mit Periode n und ein festes $s \in \mathbb{N}$ betrachten wir

$$z_t = \sum_{k=-s}^{s} g_k x_{t-k}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Es seien J_X, J_Z die Fourier-Transformierten von $\{x_1, \ldots, x_n\}$ beziehungsweise $\{z_1, \ldots, z_n\}$, $I_X = |J_X|^2$, $I_Z = |J_Z|^2$ und

$$G(e^{-i\lambda}) = \sum_{j=-s}^{s} g_j e^{-ij\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass für $\omega_j = 2\pi j/n \in (-\pi, \pi]$ gilt:

$$J_Z(\omega_j) = G(e^{-i\omega_j}) J_X(\omega_j) \quad \text{und} \quad I_Z(\omega_j) = \left|G(e^{-i\omega_j})\right|^2 I_X(\omega_j).$$

Aufgabe 38 (4 Punkte) [Periodogramm 1]

Für ein festes $\nu \in (-\pi, \pi]$ seien $x_1, \ldots, x_n$ gegeben durch

$$x_k = e^{i\nu k}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte von $\{x_1, \ldots, x_n\}$ die Darstellung

$$J(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sin(n(\lambda - \nu)/2)}{\sin((\lambda - \nu)/2)} \exp(-i(\lambda - \nu)(n+1)/2), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

besitzt und benutzen Sie dieses Ergebnis, um das Periodogramm I_8 für $\nu = \pi/4$ zu berechnen.

Aufgabe 39 (4 Punkte) [Periodogramm 2]

Zeigen Sie, dass unter den Voraussetzungen von Satz 11.2 der Vorlesung $EI_n(\omega)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $[-\pi, \pi]$ gegen $2\pi f(\omega)$ konvergiert, falls $EX_0 = m = 0$ gilt.