Prof. Dr. Josef G. Steinebach Wintersemester 2011/12

11. Übungsblatt zur VL „Zeitreihenanalyse“

Abgabe: Mo, 16.1.2012, 9.45 - 10.00 Uhr, im Seminarraum 2 des MI

Aufgabe 40 (mündlich) [Diskrete Fourier-Transformierte]

Es seien J_X und J_Y die Fourier-Transformierten von $\{x_1, \dots, x_n\}$ und $\{y_1, \dots, y_n\}$. Zeigen Sie, dass für die Fourier-Transformierte von $z_t = x_t\, y_t$ $(t = 1, \dots, n)$ gilt

$$J_Z(\omega_j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k \in J_n} J_X(\omega_k) J_Y(\omega_{j-k}),$$

wobei $\omega_j = 2\pi j/n$ und $J_n = \{j \in \mathbb{Z} : -\pi < \omega_j \leq \pi\}$ sei.

Aufgabe 41 (5 Punkte) [Periodogramm]

Beweisen Sie Satz 11.3 b) der Vorlesung.

Aufgabe 42 (3+1 Punkte) [Spektraldichte-Schätzer]

Gegeben sei die AR(1)-Zeitreihe

$$X_n - \frac{1}{2} X_{n-1} = e_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2), \quad 0 < \sigma^2 < \infty,$$

mit Spektraldichte f. Weiter sei folgender Schätzer für f gegeben:

$$\hat{f}(\omega_j) = \frac{1}{10\pi} \sum_{k=-2}^{2} I_{200}(\omega_j + \omega_k), \quad \omega_j = \frac{2\pi j}{200}, \quad \omega_j \in [-\pi, \pi].$$

Bestimmen Sie näherungsweise die Werte für

a) den Erwartungswert und die Varianz von $\hat{f}(\pi/4)$;

b) eine obere (nicht-triviale) Grenze von $P(\hat{f}(\pi/4) \geq \sigma^2)$.

Aufgabe 43 (3 Punkte) [χ^2-Approximation]

Sei $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ eine lineare Zeitreihe, die die Voraussetzungen von Satz 11.5 erfüllt. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen

$$\frac{I_n(\omega_j + \omega_k)}{\pi f(\omega_j + \omega_k)}, \quad -j < k < \frac{n}{2} - j, \quad 0 < \omega_j < \pi,$$

asymptotisch unabhängig und χ_2^2-verteilt sind.