

**12. Übungsblatt zur VL „Zeitreihenanalyse“**

Abgabe: Mo, 23.1.2012, 9.45 - 10.00 Uhr, im Seminarraum 2 des MI

**Aufgabe 44** (mündlich) [bedingte Varianz]

Seien  $X, Y$  reelle Zufallsvariablen mit existierendem bedingten Erwartungswert  $E(Y|X)$ . Die bedingte Varianz von  $Y$  unter  $X$  ist definiert als

$$\text{Var}(Y|X) := E(\{Y - E(Y|X)\}^2|X) \quad P\text{-f.s.}$$

Zeigen Sie:

- a)  $\text{Var}(Y|X) = E(Y^2|X) - \{E(Y|X)\}^2 \quad P\text{-f.s.};$   
 b)  $\text{Var}(Y) = E(\text{Var}(Y|X)) + \text{Var}(E(Y|X)).$

**Aufgabe 45** (3+1 Punkte) [Daniell-Schätzer]

Betrachten Sie den indirekten Spektralschätzer

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|h| \leq r} w(h/r) \hat{\gamma}(h) e^{-ih\lambda}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi],$$

der durch das Lag-Fenster

$$w(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

definiert wird. Zeigen Sie, dass das Spektralfenster  $W(\cdot)$  ungefähr gleich  $\frac{r}{2\pi} I_{[-\pi/r, \pi/r]}(\cdot)$  ist. Zeigen Sie dafür, dass für festes  $r \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} w(h/r) e^{-ih\cdot} = \frac{r}{2\pi} I_{[-\frac{\pi}{r}, \frac{\pi}{r}]}(\cdot) \quad \text{in } \mathcal{L}^2([-\pi, \pi]).$$

[ BITTE WENDEN ]

**Aufgabe 46** (4 Punkte) [direkter Spektraldichteschätzer]

Es sei  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$  und  $I_n(\cdot)$  das (periodisch fortgesetzte) Periodogramm zu  $x_1, \dots, x_n$ . Zeigen Sie, dass für den Schätzer

$$\hat{f}(\omega_j) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2m+1} \sum_{k=-m}^m I_n(\omega_j + \omega_k), \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{n},$$

die Gleichung

$$\hat{f}(\omega_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| < n} \lambda_k \hat{\gamma}(k) e^{-ik\omega_j}$$

gilt, wobei  $\lambda_k = (2m+1)^{-1} \sin((2m+1)\pi k/n) / \sin(\pi k/n)$  ist. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem oben angegebenen Lag-Fenster des Daniell-Schätzers.

**Aufgabe 47** (4 Punkte) [Parzen-Schätzer]

Bestimmen Sie den EDF, die asymptotische Varianz und die EBW des durch

$$w(x) = \begin{cases} 1 - 6|x|^2 + 6|x|^3, & |x| < \frac{1}{2}, \\ 2(1 - |x|)^2, & \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

definierten Parzen-Schätzers.