12. Übungsblatt zur VL „Zeitreihenanalyse“

Abgabe: Mo, 23.1.2012, 9.45 - 10.00 Uhr, im Seminarraum 2 des MI

Aufgabe 44 (mündlich) [bedingte Varianz]

Seien X, Y reelle Zufallsvariablen mit existierendem bedingten Erwartungswert $E(Y|X)$. Die bedingte Varianz von Y unter X ist definiert als

$$\mathrm{Var}(Y|X) := E(\{Y - E(Y|X)\}^2|X) \quad P\text{-f.s.}$$

Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Var}(Y|X) = E(Y^2|X) - \{E(Y|X)\}^2 \quad P$-f.s.;

b) $\mathrm{Var}(Y) = E(\mathrm{Var}(Y|X)) + \mathrm{Var}(E(Y|X))$.

Aufgabe 45 (3+1 Punkte) [Daniell-Schätzer]

Betrachten Sie den indirekten Spektralschätzer

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|h|\le r} w(h/r)\hat{\gamma}(h)e^{-ih\lambda}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi],$$

der durch das Lag-Fenster

$$w(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

definiert wird. Zeigen Sie, dass das Spektralfenster $W(\cdot)$ ungefähr gleich $\frac{r}{2\pi} I_{[-\pi/r,\pi/r]}(\cdot)$ ist. Zeigen Sie dafür, dass für festes $r \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} w(h/r)e^{-ih\,\cdot} = \frac{r}{2\pi} I_{[-\frac{\pi}{r},\frac{\pi}{r}]}(\cdot) \quad \text{in} \quad \mathcal{L}^2([-\pi, \pi]).$$

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 46 (4 Punkte) [direkter Spektraldichteschätzer]

Es sei $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ und $I_n(\cdot)$ das (periodisch fortgesetzte) Periodogramm zu $x_1, \ldots, x_n$. Zeigen Sie, dass für den Schätzer

$$\hat{f}(\omega_j) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2m+1} \sum_{k=-m}^{m} I_n(\omega_j + \omega_k), \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{n},$$

die Gleichung

$$\hat{f}(\omega_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|<n} \lambda_k \, \hat{\gamma}(k) \, e^{-ik\omega_j}$$

gilt, wobei $\lambda_k = (2m+1)^{-1} \sin((2m+1)\pi k/n) / \sin(\pi k/n)$ ist. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem oben angegebenen Lag-Fenster des Daniell-Schätzers.

Aufgabe 47 (4 Punkte) [Parzen-Schätzer]

Bestimmen Sie den EDF, die asymptotische Varianz und die EBW des durch

$$w(x) = \begin{cases} 1 - 6|x|^2 + 6|x|^3, & |x| < \frac{1}{2}, \\ 2(1-|x|)^2, & \frac{1}{2} \le |x| \le 1, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

definierten Parzen-Schätzers.