2. Übungsblatt zur VL „Zeitreihenanalyse“

Abgabe: Mo, 31.10.2011, 9.45 - 10.00 Uhr, im Seminarraum 2 des MI

Aufgabe 5 (mündlich) [Autokovarianzfunktion]

Für $\theta \in \mathbb{R}$ (fest) sei $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ durch $\gamma(h) = \theta^{|h|}$ gegeben. Bestimmen Sie alle θ, für die γ Autokovarianzfunktion einer stationären Zeitreihe ist.

Aufgabe 6 (4 Punkte) [Eigenschaften der Autokovarianzfunktion]

Sei γ die Autokovarianzfunktion einer komplexwertigen, stationären Zeitreihe $\{X_t\}_{t\in T}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) γ ist positiv-semidefinit;

(b) $\gamma(0) \geq 0$;

(c) $\gamma(-t) = \overline{\gamma(t)}$;

(d) $|\gamma(t)| \leq \gamma(0)$

(e) $|\gamma(t) - \gamma(s)|^2 \leq 2\gamma(0)\,\{\gamma(0) - \mathrm{Re}\,(\gamma\,(t-s))\}$.

Hinweis: Benutzen Sie für Teil (e), dass $0 \leq E|X_0 + zX_t - zX_s|^2$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, insbesondere für $z = x \cdot \overline{\gamma(t) - \gamma(s)}/|\gamma(t) - \gamma(s)|$, $x \in \mathbb{R}$, falls $\gamma(t) \neq \gamma(s)$.

Aufgabe 7 (5 Punkte) [Konsistenzsatz von Daniell-Kolmogorov für Poisson-Prozesse]

Beweisen Sie mit dem Satz von Daniell-Kolmogorov die Existenz des Poisson-Prozesses $\{N_t\}_{t\geq 0}$ der durch die folgenden Bedingungen gegeben ist:

- $N_0 = 0$
- Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ sind
$$N_{t_1} - N_{t_0},\, N_{t_2} - N_{t_1},\, \ldots,\, N_{t_n} - N_{t_n - 1}$$
unabhängig.
- Für $t \geq s$ ist $N_t - N_s$ Poisson-verteilt mit Erwartungswert $\lambda\,(t-s)$ $(\lambda > 0$, fest).

Hinweis: Benutzen Sie die folgende Variante des Konsistenzsatzes von Daniell-Kolmogorov:

Für $t_1 < \cdots < t_n$, $t_i \in T \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, seien $F_{t_1,\ldots,t_n}$ n-dimensionale Verteilungsfunktionen mit charakteristischen Funktionen $\varphi_{t_1,\ldots,t_n}(u_1,\ldots,u_n)$, $(u_1,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann sind die $\{F_{t_1,\ldots,t_n} : t_1 < \cdots < t_n,\ t_i \in T,\ n \in \mathbb{N}\}$ genau dann die endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen eines reellwertigen stochastischen Prozesses $\{X_t\}_{t\in T}$, wenn für alle $i = 1,\ldots,n$, $u_i \in \mathbb{R}$, gilt

$$\lim_{u_i \to 0} \varphi_{t_1,\ldots,t_n}(u_1,\ldots,u_n) = \varphi_{t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_n}(u_1,\ldots,u_{i-1},u_{i+1},\ldots,u_n).$$

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 8 (3 Punkte) [Herglotz-Lemma]

Sei $0 < a < \pi$. Zeigen Sie mit Hilfe von Gleichung (4.1) der Vorlesung, dass

$$\gamma(h) = \begin{cases} \frac{\sin(ah)}{h} & \text{für} \quad h \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \\ a & \text{für} \quad h = 0, \end{cases}$$

die Autokovarianzfunktion einer Zeitreihe $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ ist. Bestimmen Sie zusätzlich die zugehörige Spektraldichte.