Prof. Dr. Josef G. Steinebach Wintersemester 2011/12

4. Übungsblatt zur VL „Zeitreihenanalyse“

Abgabe: Mo, 14.11.2011, 9.45 - 10.00 Uhr, im Seminarraum 2 des MI

Aufgabe 12 (mündlich) [Autokovarianz-erzeugende Funktion]

Sei $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ eine stationäre Zeitreihe mit Autokovarianzfunktion γ. Die zugehörige *Autokovarianz-erzeugende Funktion* sei formal definiert durch

$$G(z) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) z^h.$$

a) Sei $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ eine zweiseitige MA(∞)-Reihe mit Koeffizienten $\{c_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, so dass $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j z^j$ auf $A_r = \{z \in \mathbb{C} \,|\, r^{-1} < |z| < r\}$ $(\exists\, r > 1)$ absolut konvergiere. Zeigen Sie, dass

$$G(z) = \sigma^2 \Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j z^j \Big) \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{c}_k z^{-k} \Big)$$

für alle $z \in A_r$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $z \mapsto \sin(z)$ nicht die Autokovarianz-erzeugende Funktion einer ARMA(p,q)-Zeitreihe gemäß $a(B)X_t = b(B)e_t$, $t \in \mathbb{Z}$, mit $a(z) \neq 0$ für $|z| = 1$ sein kann.

Aufgabe 13 (4 Punkte) [ARMA-Zeitreihen]

Sei $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ eine ARMA(p,q)-Zeitreihe, gegeben durch

$$a(B)X_t = b(B)e_t, \qquad \{e_t\}_{t\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2),$$

wobei die Polynome a und b keine gemeinsame Nullstelle besitzen und $a(z) \neq 0$ für $|z| \leq 1$. Sei weiter p ein Polynom mit $p(z) \neq 0$ für $|z| \leq 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichungen

$$p(B)a(B)Y_t = p(B)b(B)e_t$$

die eindeutige stationäre Lösung $\{Y_t\} = \{X_t\}$ besitzen.

Aufgabe 14 (4 Punkte) [Invertierbarkeit]

Sei ein MA(1)-Prozess $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ gegeben durch $X_t = e_t - \frac{1}{\varrho}\, e_{t-1}$ mit $\varrho \in \mathbb{R}$, $0 < |\varrho| < 1$, und $e_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2)$, $\sigma^2 < \infty$. Geben Sie ein weißes Rauschen $\{\widetilde{e}_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ an, so dass $X_t = \widetilde{e}_t - \varrho\, \widetilde{e}_{t-1}$ für alle $t \in \mathbb{Z}$ gilt. Zeigen Sie, dass $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ in der ersten Darstellung nicht invertierbar ist, in der zweiten Darstellung hingegen invertierbar ist.

Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 12 a) $\big($mit $c(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j z^j\big)$ und die Invertierbarkeit von $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ in der zweiten Darstellung.

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 15 (4 Punkte) [orthogonale Zuwächse]

Sei $\{N(\lambda)\}_{\lambda\in[-\pi,\pi]}$ gegeben durch $N(\lambda) = \widetilde{N}(\lambda+\pi)$, wobei $\{\widetilde{N}(t)\}_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozess mit Intensitätsparameter c sei. Zeigen Sie, dass $\{Z(\lambda)\}_{\lambda\in[-\pi,\pi]}$ mit

$$Z(\lambda) = N(\lambda) - \mathrm{E}N(\lambda), \quad \lambda \in [-\pi, \pi],$$

ein stochastischer Prozess mit orthogonalen Zuwächsen ist und geben Sie die zugehörige maßerzeugende Funktion F an.