

5. Übungsblatt zur VL „Zeitreihenanalyse“

Abgabe: Mo, 21.11.2011, 9.45 - 10.00 Uhr, im Seminarraum 2 des MI

Aufgabe 16 (mündlich) [Fourier-Entwicklung]

Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer (separabler) Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der Orthonormalbasis $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass für $f \in \mathcal{H}$ die „Fourier-Entwicklung“ $f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \rangle e_i$ gilt, wobei die Reihe in der durch das Skalarprodukt erzeugten Norm $\|\cdot\| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$ konvergiert.

Aufgabe 17 (2+2 Punkte) [ARMA(p,q)-Zeitreihen, Spektraldichte]

Beweisen Sie die Bemerkungen 6.6 b) und c) der Vorlesung.

Aufgabe 18 (1+2+1 Punkte) [stochastisches Integral]

Sei $\{Z(\lambda)\}_{\lambda \in [-\pi, \pi]}$ ein stochastischer Prozess mit orthogonalen Zuwächsen und zugehöriger maßerzeugender Funktion F . Sei ferner $g \in \mathcal{L}^2(F)$ und

$$\tilde{Z}(\lambda) = \int_{(-\pi, \lambda]} g(\nu) dZ(\nu), \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi.$$

Dann ist $\{\tilde{Z}(\lambda)\}_{\lambda \in [-\pi, \pi]}$ wieder ein stochastischer Prozess mit orthogonalen Zuwächsen.

Zeigen Sie:

a) Die maßerzeugende Funktion von $\{\tilde{Z}(\lambda)\}_{\lambda \in [-\pi, \pi]}$ ist gegeben durch

$$\tilde{F}(\lambda) = \int_{(-\pi, \lambda]} |g(\nu)|^2 dF(\nu), \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi.$$

b) Für $h \in \mathcal{L}^2(\tilde{F})$ ist $hg \in \mathcal{L}^2(F)$ und

$$\int_{(-\pi, \pi]} h(\lambda) d\tilde{Z}(\lambda) = \int_{(-\pi, \pi]} h(\lambda) g(\lambda) dZ(\lambda).$$

c) Sei $|g| > 0$ μ -f.ü., wobei μ das zu F gehörige Maß bezeichne. Dann gilt

$$Z(\lambda) - Z(-\pi) = \int_{(-\pi, \lambda]} \frac{1}{g(\nu)} d\tilde{Z}(\nu), \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi.$$

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 19 (4 Punkte) [Spektraldarstellung]

Sei $\{Z_j\}_{j=1,2,\dots}$ eine Folge paarweise unkorrelierter, zentrierter (komplexwertiger) Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\sum_{j=1}^{\infty} E|Z_j|^2 < \infty$. Sei weiter der Prozess $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ gegeben durch

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} e^{it\lambda_j} Z_j, \quad t \in \mathbb{Z},$$

mit $\lambda_j \in (-\pi, \pi]$ für $j = 1, 2, \dots$.

Zeigen Sie, dass die obige Reihe in $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ konvergiert und bestimmen Sie den zugehörigen Prozess mit orthogonalen Zuwächsen in der Spektraldarstellung von $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $Z(\lambda) := \sum_{j:\lambda_j \leq \lambda} Z_j := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \leq n: \lambda_j \leq \lambda} Z_j$, wobei $\sum_{\emptyset} := 0$, als $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ -Limes für alle $\lambda \in [-\pi, \pi]$ existiert.