5. Übungsblatt zur VL „Zeitreihenanalyse“

Abgabe: Mo, 21.11.2011, 9.45 - 10.00 Uhr, im Seminarraum 2 des MI

Aufgabe 16 (mündlich) [Fourier-Entwicklung]

Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer (separabler) Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und der Orthonormalbasis $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass für $f\in\mathcal{H}$ die „Fourier-Entwicklung“ $f=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,e_i\rangle\, e_i$ gilt, wobei die Reihe in der durch das Skalarprodukt erzeugten Norm $\|\cdot\|=\langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$ konvergiert.

Aufgabe 17 (2+2 Punkte) [ARMA(p,q)-Zeitreihen, Spektraldichte]

Beweisen Sie die Bemerkungen 6.6 b) und c) der Vorlesung.

Aufgabe 18 (1+2+1 Punkte) [stochastisches Integral]

Sei $\{Z(\lambda)\}_{\lambda\in[-\pi,\pi]}$ ein stochastischer Prozess mit orthogonalen Zuwächsen und zugehöriger maßerzeugender Funktion F. Sei ferner $g\in\mathcal{L}^2(F)$ und

$$\widetilde{Z}(\lambda)=\int\limits_{(-\pi,\lambda]} g(\nu)\,dZ(\nu),\quad -\pi\le\lambda\le\pi.$$

Dann ist $\{\widetilde{Z}(\lambda)\}_{\lambda\in[-\pi,\pi]}$ wieder ein stochastischer Prozess mit orthogonalen Zuwächsen.

Zeigen Sie:

a) Die maßerzeugende Funktion von $\{\widetilde{Z}(\lambda)\}_{\lambda\in[-\pi,\pi]}$ ist gegeben durch

$$\widetilde{F}(\lambda)=\int\limits_{(-\pi,\lambda]} |g(\nu)|^2\,dF(\nu),\quad -\pi\le\lambda\le\pi.$$

b) Für $h\in\mathcal{L}^2(\widetilde{F})$ ist $hg\in\mathcal{L}^2(F)$ und

$$\int\limits_{(-\pi,\pi]} h(\lambda)\,d\widetilde{Z}(\lambda)=\int\limits_{(-\pi,\pi]} h(\lambda)\,g(\lambda)\,dZ(\lambda).$$

c) Sei $|g|>0$ $\mu-$f.ü., wobei μ das zu F gehörige Maß bezeichne. Dann gilt

$$Z(\lambda)-Z(-\pi)=\int\limits_{(-\pi,\lambda]}\frac{1}{g(\nu)}\,d\widetilde{Z}(\nu),\quad -\pi\le\lambda\le\pi.$$

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 19 (4 Punkte) [Spektraldarstellung]

Sei $\{Z_j\}_{j=1,2,\ldots}$ eine Folge paarweise unkorrelierter, zentrierter (komplexwertiger) Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\sum_{j=1}^{\infty} E|Z_j|^2 < \infty$. Sei weiter der Prozess $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ gegeben durch

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} e^{it\lambda_j} Z_j\,, \quad t \in \mathbb{Z},$$

mit $\lambda_j \in (-\pi, \pi]$ für $j = 1, 2, \ldots$.

Zeigen Sie, dass die obige Reihe in $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ konvergiert und bestimmen Sie den zugehörigen Prozess mit orthogonalen Zuwächsen in der Spektraldarstellung von $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $Z(\lambda) := \sum_{j:\lambda_j\le\lambda} Z_j := \lim_{n\to\infty} \sum_{j\le n:\lambda_j\le\lambda} Z_j$, wobei $\sum_{\emptyset} := 0$, als $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$-Limes für alle $\lambda \in [-\pi, \pi]$ existiert.