

6. Übungsblatt zur VL „Zeitreihenanalyse“Abgabe: Mo, 28.11.2011, 9.45 - 10.00 Uhr, im Seminarraum 2 des MI**Aufgabe 20** (mündlich) [Vorhersage von MA(1)-Zeitreihen]Die Zeitreihe $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sei durch die Gleichungen

$$X_n = e_n + \beta e_{n-1}, \quad \{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \sim \text{WN}(0, \sigma^2),$$

mit $|\beta| < 1$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_{n+1} - \hat{X}_{n+1})^2 = \sigma^2$$

für die beste lineare 1-Schritt-Vorhersage $\hat{X}_{n+1}$ gilt.**Hinweis:** Betrachten Sie hierzu den Innovations-Algorithmus.**Aufgabe 21** (3 Punkte) [Projektionen]Sei $\{X_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ eine zentrierte, stationäre Zeitreihe mit Spektralfunktion F und zugehörigem Prozess $\{Z(\lambda)\}_{\lambda \in [-\pi, \pi]}$ mit orthogonalen Zuwächsen. Sei weiter

$$\mathcal{I}(g) = \int_{(-\pi, \pi]} g(\lambda) dZ(\lambda), \quad g \in \mathcal{L}^2(F),$$

sowie $\mathcal{M}_n := \overline{\text{sp}} \{X_j \mid j \leq n\}$ und $\mathcal{N}_n := \overline{\text{sp}} \{e^{ij\cdot} \mid j \leq n\}$. Zeigen Sie:

$$P_{\mathcal{M}_n} X_{n+h} = \mathcal{I}(P_{\mathcal{N}_n} e^{i(n+h)\cdot}).$$

Aufgabe 22 (6 Punkte) [Vorhersage von ARMA(p,q)-Zeitreihen im Frequenzbereich]Sei $\{X_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ eine kausale und invertierbare ARMA(p,q)-Zeitreihe gegeben durch die Gleichungen

$$a(B)X_j = b(B)e_j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Sei weiter $f(\lambda) = |g(\lambda)|^2$ die Spektraldichte von $\{X_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ mit

$$g(\lambda) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-ik\lambda}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi],$$

und $c(z) = \sum_k c_k z^k = b(z)/a(z)$ für $|z| \leq 1$.Bestimmen Sie $\hat{X}_{n+h}$ durch Vorhersage im Frequenzbereich.

Aufgabe 23 (3 Punkte) [1-Schritt-Vorhersage]

Sei $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle, stationäre, zentrierte Zeitreihe mit Autokovarianzfunktion

$$\gamma(h) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|h|}, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Sei weiter $(0.5, 0.7, 0.6)$ eine Realisation von (X_1, X_2, X_3) . Berechnen Sie die 1-Schritt-Vorhersage $\hat{x}_4 = \hat{x}_4(x_1, x_2, x_3)$ sowie den Vorhersagefehler v_4

- a) über Inversion der Kovarianzmatrix Γ_3 ;
- b) mittels des Durbin-Levinson-Algorithmus.